＜L(1)４分身の値を固有値として持つ実対称行列(エルミート行列)＞　rev1.01

今回はL(1)４分身に対し、次の予想を確かめます。つまりL(1)４分身の値を固有値として持つ実対称行列を求めます。(その９６) の冒頭のものを次のようにすこし厳密に書き換えました。

[L(1)分割-実対称行列 予想]

「ゼータのｎ分身の特殊値を解にもつ代数方程式」＝「実対称行列(エルミート行列)の固有方程式」となっていて、その固有方程式の固有値は分身たちの特殊値に本質的に一致する。

ここで、"ｎ分身" の意味は、次のタンジェント部分分数展開式

$$1/(1^2-x^2)\ +1/(3^2-x^2)\ +1/(5^2-x^2)\ +\cdots\ =(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$$

にm/(2n)を代入して求めたｎ分割のｎ個の分身たちを指す。(ｎは１以上の整数。m＝1, 3, 5・・, 2n-1)

以下、L(1)の４分身の値を固有値として持つ実対称行列（エルミート行列）を求めていきます。

$$L(1)=\ 1\ -1/3\ +1/5\ -1/7\ +\cdots\ =\pi/4$$

はじめにL(1)４分身を示します。「ゼータの香りの漂う公式の背後にある構造（その１４)」から抜粋。

****

■L(1)４分割

$B1=\ 1\ -1/15\ +1/17\ -1/31\ +1/33\ -1/47\ +\cdots\ =(\pi/16)\tan(7\pi/16)$

$B2=1/3\ -1/13\ +1/19\ -1/29\ +1/35\ -1/45\ +\cdots=(\pi/16)\tan(5\pi/16)$

$B3=1/5\ -1/11\ +1/21\ -1/27\ +1/37\ -1/43\ +\cdots=(\pi/16)\tan(3\pi/16)$

$B4=1/7\ -1/9\ +1/23\ -1/25\ +1/39\ -1/41\ +\cdots\ =(\pi/16)\tan(\pi/16)$

$B1\ -B2\ +B3\ -B4=\pi/4=L(1)$ である。

tan()を計算した結果は、以下の通り。

$\tan(7\pi/16)=1\ +\sqrt{2}\ +\sqrt{4+2\sqrt{2}}$、$\tan(5\pi/16)=-1\ +\sqrt{2}\ +\sqrt{4-2\sqrt{2}}$

$\tan(3\pi/16)=1\ -\sqrt{2}\ +\sqrt{4-2\sqrt{2}}$、$\tan(\pi/16)\ =-1\ -\sqrt{2}\ +\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

****

L(1)４分身の値 B1, -B2 , B3, -B4 を解にもつ代数方程式は、(その５２) でも見ましたが、次となります。

$$x^4\ -4(L(1)/4)x^3-6(L(1)/4)^2x^2\ +4(L(1)/4)^3x\ +(L(1)/4)^4=0\quad\text{------①}$$

分身の値 B1, -B2 , B3, -B4 での tan()部分だけの解をもつ代数方程式を求めてもそれは①と本質的に同じものです。それは（その５２) で見たように次の②になる。

$$x^4\ -4x^3\ -6x^2\ +4x\ +1=0\quad\text{------②}$$

②は $\tan(7\pi/16)$, $-\tan(5\pi/16)$, $\tan(3\pi/16)$, $-\tan(\pi/16)$ を解に持ちます。①でも②でも本質的に同じなので、以下、簡潔な②を採用します。

まとめます。

****

＜L(１)４分身の値を解にもつ代数方程式＞

$$x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1 = 0 \quad \text{------②}$$

****

L(1)の１分割、２分割、３分割、４分割、５分割・・の値を解にもつ方程式をすべて並べると、その係数がパスカルの三角形をなすという面白い事実を（その５２）で見ましたが、②はその中の一つです。

さて、②の方程式の解を固有値としてもつエルミート行列（実対称行列）が存在するでしょうか？それは存在し、次のものになります。

L(1)４分身の値を固有値としてもつ実対称行列は次のものです。(G4 の 4 は 4 次を表す)

$$G4=\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{(4+2\sqrt{2})} \\ 0 & 1-\sqrt{2} & \sqrt{(4-2\sqrt{2})} & 0 \\ 0 & \sqrt{(4-2\sqrt{2})} & 1-\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{(4+2\sqrt{2})} & 0 & 0 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

きれいな形です。<u>右下方向への対角線に対して対称であり、且つ左下方向への対角線に対しても対称</u>となっています。特別な形のエルミート行列と言えます。

この行列の固有方程式は、$x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1 = 0$ であり、上記の②に一致します。その固有値二つ λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 は当然ながら L(1)４分身の値（特殊値）に一致する。固有値と対応する固有ベクトルを以下に示す。

固有値 $\lambda_1 = \tan(7\pi/16) = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{(4+2\sqrt{2})}$ に対応する固有ベクトル $p_1=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

固有値 $\lambda_2 = -\tan(5\pi/16) = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{(4-2\sqrt{2})}$ に対応する固有ベクトル $p_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

固有値 $\lambda_3 = \tan(3\pi/16) = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{(4-2\sqrt{2})}$ に対応する固有ベクトル $p_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

固有値λ_4= $-\tan(\pi/16)$ $=1+\sqrt{2}-\sqrt{4+2\sqrt{2}}$に対応する固有ベクトル $p_4=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\0\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

固有ベクトルp_1, p_2, p_3, p_4は互いに直交していることを確かめてください。

ここで、面白い事実を指摘しておきます。

上の G4 では要素が数値で表されているため規則性が見えにくいのですが、これを分身の記号で表現すると、そこに興味ある規則を見出すことができるのです。

$$x^4 -4x^3 -6x^2 +4x +1=0 \quad \text{------②}$$

この②の方程式の解は、以下の４つの値であり、L（１）４分身（B1, −B2, B3, −B4）の値と本質的に同じものといえます。

$$(16/\pi)B1= \tan(7\pi/16)=1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}$$
$$-(16/\pi)B2=-\tan(5\pi/16)=1-\sqrt{2}-\sqrt{4-2\sqrt{2}}$$
$$(16/\pi)B3= \tan(3\pi/16)=1-\sqrt{2}+\sqrt{4-2\sqrt{2}}$$
$$-(16/\pi)B4=-\tan(\pi/16)=1+\sqrt{2}-\sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

注記：$B1 - B2 + B3 - B4=\pi/4=L(1)$ です。

上記の４式を利用して、G4 行列を B1, −B2, B3, −B4 で表現し直すと、次となる。

$$G4=(8/\pi)\begin{bmatrix}B1-B4 & 0 & 0 & B1+B4\\ 0 & -B2+B3 & B2+B3 & 0\\ 0 & B2+B3 & -B2+B3 & 0\\ B1+B4 & 0 & 0 & B1-B4\end{bmatrix}$$

簡明さに驚きます。G4 行列は、L(1)４分身たち B1, −B2, B3, −B4 で簡潔に表現できるのです！！

$B1 - B2 + B3 - B4=\pi/4=L(1)$ であることと合わせて G4 を眺めてください。

これだけでも十分ですが、さらに大事なことを指摘しておきます。じつは、上記の G4 は次のようになっています。

$$G4=(8/\pi)\begin{bmatrix}A1 & 0 & 0 & B1+B4\\ 0 & -A2 & B2+B3 & 0\\ 0 & B2+B3 & -A2 & 0\\ B1+B4 & 0 & 0 & A1\end{bmatrix}$$

ここで A1, −A2 は、L(1)２分割の２分身です。

なんと左上から右下への対角線のラインには、L(1)２分身（A1, −A2）が並ぶのです！
G4 は、L(1)４分身に関係するエルミート行列ですが、４分身の親の２分身が、左上から右下への対角線のラインに配置される。ですから、このラインは最重要なラインだといえるかもしれません。

ちなみに、A1, −A2 と B1, −B2, B3, −B4 の関係は次の通りです。まさに親子の関係です。（その８７）参照。
A1=B1 −B4
A2=B2 −B3

「親の分身が、左上から右下への対角線のラインに顔をのぞかせる」事実は、じつは先に求めたＬ(１)２分身、３分身の実対称行列でも同様に成り立ちます。

＝＝＝

以上。　杉岡幹生　2019.3.23

2019.12.27 改訂(rev1.01)
中心対称行列という言葉を削除し、その関連の記述を変更。最後の対角ラインの親子関係の記述を追加。
文字フォントを変更。