＜L(1)２分身，３分身の値を固有値として持つ実対称行列(エルミート行列)＞　rev1.01

（その９５）で示した次のことを、具体的に見ていきます。

****

「ゼータ分身の特殊値を解にもつ代数方程式」＝「実対称行列(エルミート行列)の固有方程式」となっていて、その固有方程式の固有値は分身たちの特殊値に本質的に一致する。

****

今回は、L(1)＝1 -1/3 +1/5 -1/7 +・・＝π/4 の２分割、３分割の分身の値を固有値として持つ実対称行列（エルミート行列）を求めます。

以下では、「L(1)２分割の２分身」のことを“L(1)２分身”、「L(1)３分割の３分身」を“L(1)３分身”と短く呼ぶことにします。

はじめにL(1)２分身とL(1)３分身を示します。（その１４）、（その２８）から抜粋。

＝＝＝

■L(1)２分割

A1＝ 1 -1/7 +1/9 -1/15 + 1/17 -1/23 +・・ ＝(π/8)tan(3π/8)

A2＝1/3 -1/5 +1/11 -1/13 + 1/19 -1/21 +・・＝(π/8)tan(π/8)

A1 -A2＝π/4＝L(1)である。tan()の部分は右の通り。 tan(3π/8)＝1 +√2、tan(π/8)＝-1 +√2

■L(1)３分割

B1＝ 1 -1/11 +1/13 -1/23 +1/25 -1/35 +・・＝(π/12)tan(5π/12)

B2＝1/3 -1/9 +1/15 -1/21 +1/27 -1/33 +・・＝(π/12)tan(3π/12)

B3＝1/5 -1/7 +1/17 -1/19 +1/29 -1/31 +・・＝(π/12)tan(π/12)

B1 -B2 +B3＝π/4＝L(1) である。

tan()の部分は右の通り。 tan(5π/12) ＝2 +√3、tan(3π/12) ＝1、tan(π/12) ＝2 -√3

＝＝＝

L(1)２分身の値 A1，-A2 を解にもつ代数方程式は、（その５２）でも見ましたが、次となります。

x^2 -2(L(1)/2)x -(L(1)/2)^2＝0 -------①

分身の値 A1，-A2 での tan()部分だけの解をもつ代数方程式を求めてもそれは①と本質的に同じものです。それは（その５２）で見たように次の②になる。

x^2 -2x -1＝0　　 -------②

②は tan(3π/8)と-tan(π/8)を解に持ちます。①でも②でも本質的に同じなので、以下、簡潔な②を採用します。

同様にして、L（１）３分身の $\tan(5\pi/12)$, $-\tan(3\pi/12)$, $\tan(\pi/12)$ を解にもつ（②の形に対応する）代数方程式を求めると次となる。

$x^3 -3x^2 -3x +1=0$　　------③

まとめます。

****

＜L（１）２分身の値を解にもつ代数方程式＞

$x^2 -2x -1=0$　　　------②

＜L（１）３分身の値を解に持つ代数方程式＞

$x^3 -3x^2 -3x +1=0$　　-----③

****

さらに４分割、５分割・・の値を解にもつ方程式を並べると、その係数がパスカルの三角形をなすことも興味深い事実として（その５２）で見たのでした。

さて、私たちの最大の興味は上の②、③の方程式の解を固有値としてもつエルミート行列（実対称行列）が存在するか？ということです。それは存在し、次のものになります。

L(1)２分身の値を固有値としてもつ実対称行列は、次のものです(G2 の 2 は 2 次を表す)。

$$G2=\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

この行列の固有方程式は、$x^2 -2x -1=0$　であり、上記の②に一致します。その固有値二つ λ_1, λ_2 は当然ながら L(1)２分身の値（特殊値）に一致する。固有値と対応する固有ベクトルを以下に示す。

固有値 $\lambda_1=\tan(3\pi/8)$ $=1+\sqrt{2}$ に対応する固有ベクトル $p_1=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

固有値 $\lambda_2=-\tan(\pi/8)$ $=1-\sqrt{2}$ に対応する固有ベクトル $p_2=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

固有ベクトル p_1, p_2 は互いに直交していることを確かめてください。

次に L(1)３分身の値を固有値としてもつ３次実対称行列 G3 は次のものです。

$$G3=\begin{bmatrix} 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

美しい形です。G3 は（G2 も）、右下方向への対角線に対して対称であり、且つ左下方向への対角線に対しても対称となっています。

G3 の固有方程式は、$x^3-3x^2-3x+1=0$ であり、上方の③に一致します。その固有値三つ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は、当然ながら L(1) ３分身の値（特殊値）に一致する。固有値と対応する固有ベクトルを以下に示す。

固有値 $\lambda_1=\tan(5\pi/12)=2+\sqrt{3}$ に対応する固有ベクトル $p_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

固有値 $\lambda_2=-\tan(3\pi/12)=-1$ に対応する固有ベクトル　　$p_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

固有値 $\lambda_3=\tan(\pi/12)=2-\sqrt{3}$ に対応する固有ベクトル $p_3=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

p_1, p_2, p_3 は互いに直交していることを確かめてください。

以上。

このように L(1) ２分身、L(1) ３分身の値を固有値にもつ実対称行列（エルミート行列）が求まりました。

L(1) ４分身や ζ(2) 分身は、次回以見ていきます。

最後に、気づいたことをメモしておきます。

＝＝＝

●G2 や G3 はただの対称行列ではない。特別なもっと対称性の高い形をしている。右下方向への対角線に対して対称であり、且つ左下方向への対角線に対しても対称となっている！

●今回は、行列の中の要素は単なる数値で示したが、tan()の三角関数やまた A1,-A2 や B1,-B2,B3 などの分身記号であらわすと、さらなる規則性が見えてきそうである。

●現時点で L(1) ２分身／３分身／４分身と、ζ(2) ２分身／３分身／４分身の実対称行列が求まっている。これらでは、L(1) と ζ(2) の固有ベクトルは一致した！　任意 n 分身でも一致すると思われる。
これらの実対称行列では、固有値が非常に計算しやすい形になっている。

●L（１）２分身、３分身のみならず、４分身、５分身、・・・と任意の n 分身で冒頭の関係が成り立っていると考える。この場合の“n 分身”の意味は、これまでこの１年間使い続けてきた部分分数展開式
$1/(1^2-x^2)+1/(3^2-x^2)+1/(5^2-x^2)+\cdots=(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$
に $m/(2n)$ を代入して求めた n 分割の n 分身たちを指す。(n は１以上の整数。m＝1, 3, 5・・, 2n-1)

●対称行列は、固有値と固有ベクトルを用いて分解的な表現ができる。もちろん G2 や G3 でもできる。対称行列は、固有値と固有ベクトルで構成（表現）できる。これを“対称行列のスペクトル分解”という。

●ゼータ分身とエルミート行列の関係に気づいたのは、群論の本で次の定理を見たからです。
****
[定理]
　エルミート行列の固有値は実数で、縮重がなければ、その固有ベクトルは互いに直交する。
****
　以前考察した分身の値を解にもつ代数方程式が実数解のみもつことが気になっていて、上の定理とリンクしたことから冒頭の関係がひらめきました。そしていくつか計算をし、任意の n で成り立っているに違いないと確信した次第です。ですから冒頭のものは正確には予想です。

＝＝

以上。（杉岡幹生）2019.3.21

2019.12.27 改訂(rev1.01)　中心対称行列という言葉を削除し、その関連の記述を変更。文字フォントを変更。