＜ 分母に5の倍数の項がない交代級数 ＞

ゼータの香りの漂う公式から、面白い結果が出たので報告したい。

交代級数

1-1/2+1/3-1/4+1/5-1/6+1/7-1/8+1/9-1/10+1/11- ・・・=log2

は昔からよく知られている。

では、上とは似ているが少し違う次の交代級数は、いくらになるだろうか？

1-1/2+1/3-1/4+1/6-1/7+1/8-1/9+1/11-1/12+1/13-1/14+1/16-1/17+1/18-1/19+1/21- ・・・

5の倍数の項だけがない不可思議な感じを漂わせる級数だが・・

これは(π/5)√(2-2/√5)に収束する。そしてそれはじつは(π/5)/sin(2π/5) である。（注記1)

こんなにもシンプルな値に収束するのである！

これがゼータの香りの漂う公式

1/(1^2+a^2) + 1/(2^2+ a^2) + 1/(3^2+ a^2) + 1/(4^2+ a^2) + ・・・

＝-1/(2a^2) + (π/(2a))・(e^(2aπ)+1)/(e^(2aπ)-1)

から初等的に出る。その導出過程を次に示す。

［導出過程］

1/(1^2+a^2) + 1/(2^2+ a^2) + 1/(3^2+ a^2) + 1/(4^2+ a^2) + 1/(5^2+ a^2) + ・・・

= -1/(2a^2) + (π/(2a))・(e^(2aπ)+1)/(e^(2aπ)-1) --- ①

①の左辺と右辺のaに複素数 i/5を代入する。（iは虚数単位)

左辺

= 1/(1^2-(1/5)^2) + 1/(2^2-(1/5)^2) + 1/(3^2-(1/5)^2) + 1/(4^2-(1/5)^2) + 1/(5^2-(1/5)^2) + ・・・

= (5/2)[{1/(1-1/5) - 1/(1+1/5)} + {1/(2-1/5) - 1/(2+1/5)} + {1/(3-1/5) - 1/(3+1/5)}

+ {1/(4-1/5) - 1/(4+1/5)} + {1/(5-1/5) - 1/(5+1/5)} + {1/(6-1/5) - 1/(6+1/5)} + ・・・]

= (5/2)[{1/(4/5) - 1/(6/5)} + {1/(9/5) - 1/(11/5)} +{1/(14/5) - 1/(16/5)} +{1/(19/5) - 1/(21/5)}

+ {1/(24/5) - 1/(26/5)} +{1/(29/5) - 1/(31/5)} + ・・・]

$= (25/2)\{1/4 - 1/6 + 1/9 - 1/11 + 1/14 - 1/16 + 1/19 - 1/21 + 1/24 - 1/26 + 1/29 - 1/31 + \cdots\}$

右辺

$= -1/\{2\cdot(i/5)^2\} + \{\pi/(2(i/5))\}(e^{(2\pi i/5)}+1)/(e^{(2\pi i/5)}-1)$

$= 25/2 - (5\pi i/2)(e^{(\pi i/5)}+e^{(-\pi i/5)})/(e^{(\pi i/5)}-e^{(-\pi i/5)})$

$=25/2 - (5\pi i/2)\{\cos(\pi/5)+i\cdot\sin(\pi/5)+\cos(-\pi/5)+i\cdot\sin(-\pi/5)\} / \{\cos(\pi/5)+i\cdot\sin(\pi/5)-\cos(-\pi/5)-i\cdot\sin(-\pi/5)\}$

$=25/2 - (5\pi/2)\cos(\pi/5)/\sin(\pi/5)$

$=25/2 - (5\pi/2)/\tan(\pi/5)$

よって、左辺=右辺から、

$(25/2)\{1/4 - 1/6 + 1/9 - 1/11 + 1/14 - 1/16 + 1/19 - 1/21 + 1/24 - 1/26 + 1/29 - 1/31 + \cdots\}$

$= 25/2 - (5\pi/2)/\tan(\pi/5)$

これより、

$1/4 - 1/6 + 1/9 - 1/11 + 1/14 - 1/16 + 1/19 - 1/21 + 1/24 - 1/26 + 1/29 - 1/31 + \cdots$

$= 1-(\pi/5)/\tan(\pi/5)$

したがって、

$1 - 1/4 + 1/6 - 1/9 + 1/11 - 1/14 + 1/16 - 1/19 + 1/21 - 1/24 + 1/26 - 1/29 + 1/31 - \cdots$

$= (\pi/5)/\tan(\pi/5)$ ---②-1

ここでtanの5倍角公式を使ってtan(π/5) を計算すると$\tan(\pi/5)=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$となるので、②-1は次のようにも表わせる。

$1 - 1/4 + 1/6 - 1/9 + 1/11 - 1/14 + 1/16 - 1/19 + 1/21 - 1/24 + 1/26 - 1/29 + 1/31 - \cdots$

$= (\pi/5)/\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ ---②-2

　まだ導出途中だが、この式（②-1 or ②-2）も驚きの式であり、ふしぎな感じがする。この式は秩序だった式だが、ディリクレのL関数L（χ,s）ではない。つまりゼータではない。

次に、①の左辺と右辺のaに2i/5を代入する。（iは虚数単位）

上記と同様に計算して、次式を得る。

$$1/2 - 1/3 + 1/7 - 1/8 + 1/12 - 1/13 + 1/17 - 1/18 + 1/22 - 1/23 + 1/27 - 1/28 + \cdots$$
$$= (\pi/5)/\tan(2\pi/5) \quad \text{---③-1}$$

tanの5倍角公式を使い$\tan(2\pi/5)$を計算すると、$\tan(2\pi/5)=\sqrt{5+2\sqrt{5}}$となるから③-1は次のようにも表わせる。

$$1/2 - 1/3 + 1/7 - 1/8 + 1/12 - 1/13 + 1/17 - 1/18 + 1/22 - 1/23 + 1/27 - 1/28 + \cdots$$
$$= (\pi/5)/\sqrt{5+2\sqrt{5}} \quad \text{---③-2}$$

　この式（③-1 or ③-2）も秩序があり、ふしぎが漂っている。この式もL（χ，s）ではない、つまりゼータではない。

　これで準備が整った。②-1、②-2、③-1、③-2を並べてみよう。

$$1 - 1/4 + 1/6 - 1/9 + 1/11 - 1/14 + 1/16 - 1/19 + 1/21 - 1/24 + 1/26 - 1/29 + 1/31 - \cdots$$
$$= (\pi/5)/\tan(\pi/5) \quad \text{---②-1}$$

$$1 - 1/4 + 1/6 - 1/9 + 1/11 - 1/14 + 1/16 - 1/19 + 1/21 - 1/24 + 1/26 - 1/29 + 1/31 - \cdots$$
$$= (\pi/5)/\sqrt{5-2\sqrt{5}} \quad \text{---②-2}$$

$$1/2 - 1/3 + 1/7 - 1/8 + 1/12 - 1/13 + 1/17 - 1/18 + 1/22 - 1/23 + 1/27 - 1/28 + \cdots$$
$$= (\pi/5)/\tan(2\pi/5) \quad \text{---③-1}$$

$$1/2 - 1/3 + 1/7 - 1/8 + 1/12 - 1/13 + 1/17 - 1/18 + 1/22 - 1/23 + 1/27 - 1/28 + \cdots$$
$$= (\pi/5)/\sqrt{5+2\sqrt{5}} \quad \text{---③-2}$$

②-2から③-2を辺々引き算して、次を得る。

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/6 - 1/7 + 1/8 - 1/9 + 1/11 - 1/12 + 1/13 - 1/14 + 1/16 - 1/17 + 1/18 - 1/19 + \cdots$$
$$=(\pi/5)\ \{1/\sqrt{5-2\sqrt{5}} - 1/\sqrt{5+2\sqrt{5}}\}$$

$=(\pi/5)\ [\ \{\sqrt{(5+2\sqrt{5})}\ -\ \sqrt{(5-2\sqrt{5})}\}\ /\ \{\sqrt{(5-2\sqrt{5})}\ \cdot \sqrt{(5+2\sqrt{5})}\ \}\ ]$

$=(\pi/5)\ \{\sqrt{(1+2/\sqrt{5})}\ -\ \sqrt{(1-2/\sqrt{5})}\ \}$

$=(\pi/5)\sqrt{(2-2/\sqrt{5})}$

②-1から③-1を辺々引き算して、次を得る。

$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/6 - 1/7 + 1/8 - 1/9 + 1/11 - 1/12 + 1/13 - 1/14 + 1/16 - 1/17 + 1/18 - 1/19 + \cdot\cdot$

$=(\pi/5)\ \{1/\tan(\pi/5)\ \ - 1/\tan(2\pi/5)\}$

$=(\pi/5)\ \{\cos(\pi/5)/\sin(\pi/5)\ -\ \cos(2\pi/5)/\sin(2\pi/5)\}$

$=(\pi/5)\sin(2\pi/5-\pi/5)/\ \{\sin(\pi/5)\cdot\sin(2\pi/5)\}$

$=(\pi/5)\sin(\pi/5)/\ \{\sin(\pi/5)\cdot\sin(2\pi/5)\}$

$=(\pi/5)/\sin(2\pi/5)$

　このようにして「分母に5の倍数の項がない交代級数」とその値（収束値）が得られた。

少し項数を増やして表現しておこう。

$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/6 - 1/7 + 1/8 - 1/9 + 1/11 - 1/12 + 1/13 - 1/14 + 1/16 - 1/17 + 1/18 - 1/19 + 1/21$

$- 1/22 + 1/23 - 1/24 + 1/26 - 1/27 + 1/28 - 1/29 + 1/31 - 1/32 + 1/33 - 1/34 + 1/36 - \cdot\cdot\cdot$

$=\ (\pi/5)\sqrt{(2-2/\sqrt{5})}$

または

$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/6 - 1/7 + 1/8 - 1/9 + 1/11 - 1/12 + 1/13 - 1/14 + 1/16 - 1/17 + 1/18 - 1/19 + 1/21$

$- 1/22 + 1/23 - 1/24 + 1/26 - 1/27 + 1/28 - 1/29 + 1/31 - 1/32 + 1/33 - 1/34 + 1/36 - \cdot\cdot\cdot$

$=\ (\pi/5)/\sin(2\pi/5)$

　言わずもがなかもしれないが、この5の倍数の項がない交代級数もディリクレのL関数ではない（ディリクレ指標の規則に合っていない）。すなわちゼータではない。

［終わり］

　この級数は、いつまで眺めていても飽きないというのか、どこまでも不思議が残っていく式である。読者はどう思われるだろうか。

上では、aにi/5と2i/5を代入したが、4i/5を代入した場合はi/5代入の結果に一致し、また3i/5を代入した場合は2i/5代入の結果に一致する。詳細は略す。

Excelマクロを使って数値的にも検証しておいた。2億項まで計算した結果を次に示す。（小数点以下8桁で表示）

右辺＝$(\pi/5)\sqrt{2-2/\sqrt{5}}=(\pi/5)/\sin(2\pi/5)=0.66065320$

左辺2万項まで＝0.66063720

左辺20万項まで＝0.66065160

左辺2000万項まで＝0.66065318

左辺2億項まで＝0.66065320

このように左辺、右辺で合致した。

（注記1）この結果を得たとき、何人かの数学の仲間にメールで「 5の倍数の項がない交代級数の値が得られた。その値は、$(\pi/5)\{\sqrt{1+2/\sqrt{5}}-\sqrt{1-2/\sqrt{5}}\}$ となった。」と知らせた。みな一様に「興味深い」「不思議な感じ」という意味の感想を述べられた。その中でSugimoto氏が $\{\sqrt{1+2/\sqrt{5}}-\sqrt{1-2/\sqrt{5}}\}$ の部分に対し、次の変形を示された。これには驚いた。つまり、この級数は $(4/\sqrt{5})(\pi/5)\sin(\pi/5)$ になることを示されたわけである。

$$\sqrt{1+2/\sqrt{5}}-\sqrt{1-2/\sqrt{5}} = \sqrt{2-2/\sqrt{5}} = \sqrt{10-2\sqrt{5}}/\sqrt{5} = (4/\sqrt{5})\ \sin(\pi/5)$$

私はこの変形に触発されて二つの$\tan(\pi/5)$、$\tan(2\pi/5)$の形で止めていた計算をさらにおし進め$(\pi/5)/\sin(2\pi/5)$に行き着くことができた（[導出過程]参照）。Sugimoto氏に感謝したい。

今回の結果をまとめておく。

[まとめ]

****

ゼータの香りの漂う公式

$$1/(1^2+a^2) + 1/(2^2+ a^2) + 1/(3^2+ a^2) + 1/(4^2+ a^2) + \cdots$$

$$=-1/(2a^2) + (\pi/(2a))\cdot(e^{2a\pi}+1)/(e^{2a\pi}-1)$$

におけるaに、ある複素数を代入することで次の結果が得られる。（以下のi は虚数単位）

[aに i/5 または 4i/5 を代入した場合]

$$1 - 1/4 + 1/6 -1/9 + 1/11 - 1/14 + 1/16 - 1/19 + 1/21 - 1/24 + 1/26 - 1/29 + 1/31 - \cdots$$
$$= (\pi/5)/\tan(\pi/5) \quad \text{---A-1}$$

$\tan(\pi/5)=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$より、A-1は次のようにも表わせる。

1 − 1/4 + 1/6 − 1/9 + 1/11 − 1/14 + 1/16 − 1/19 + 1/21 − 1/24 + 1/26 − 1/29 + 1/31 − ・・・
$= (\pi/5)/\sqrt{(5-2\sqrt{5})}$ ---A-2

[aに 2i/5 または 3i/5 を代入した場合]

1/2 − 1/3 + 1/7 − 1/8 + 1/12 − 1/13 + 1/17 − 1/18 + 1/22 − 1/23 + 1/27 − 1/28 + ・・・
$= (\pi/5)/\tan(2\pi/5)$ ---B-1

$\tan(2\pi/5) = \sqrt{(5+2\sqrt{5})}$ より、B-1は次のようにも表わせる。

1/2 − 1/3 + 1/7 − 1/8 + 1/12 − 1/13 + 1/17 − 1/18 + 1/22 − 1/23 + 1/27 − 1/28 + ・・・
$= (\pi/5)/\sqrt{(5+2\sqrt{5})}$ ---B-2

上記の結果から次の交代級数の値が求まった。

[分母に5の倍数の項がない交代級数]

A-1とB-1を組み合わせて、次を得る。

1 − 1/2 + 1/3 − 1/4 + 1/6 − 1/7 + 1/8 − 1/9 + 1/11 − 1/12 + 1/13 − 1/14 + 1/16 − 1/17 + 1/18 − 1/19 + 1/21 − 1/22 + 1/23 − 1/24 + 1/26 − 1/27 + 1/28 − 1/29 + 1/31 − 1/32 + 1/33 − 1/34 + 1/36 − ・・・

$=(\pi/5)/\sin(2\pi/5)$

A-2とB-2を組み合わせて、次を得る。

1 − 1/2 + 1/3 − 1/4 + 1/6 − 1/7 + 1/8 − 1/9 + 1/11 − 1/12 + 1/13 − 1/14 + 1/16 − 1/17 + 1/18 − 1/19 + 1/21 − 1/22 + 1/23 − 1/24 + 1/26 − 1/27 + 1/28 − 1/29 + 1/31 − 1/32 + 1/33 − 1/34 + 1/36 − ・・・

$=(\pi/5)\sqrt{(2-2/\sqrt{5})}$

****

2018年4月7日　　杉岡 幹生