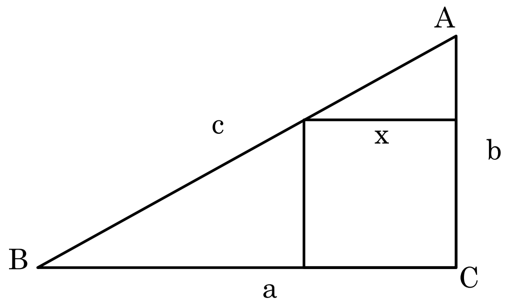
# 和算にまなぶ（２）

「日本の数学―何題解けますか？[下]」（深川英俊・ダン・ソコロフスキー著） ９頁より

中川　宏

**問題** 7.4.1（「摘要算法」武田眞元、１８４６年）

∠Ｃが直角の直角三角形 ABC に、図のように内接している正方形の一辺 x を a、b で表せ。




**解答**（中川）

△ABC と A を頂点とする小三角形との相似より、

a：b＝x：b－x

よって、x＝$\dfrac{ab}{a+b}$

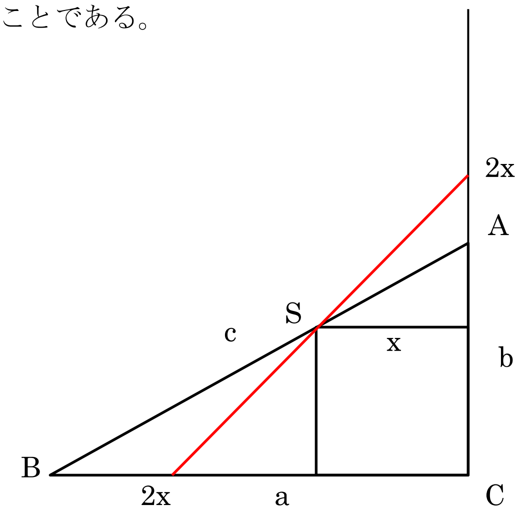
**敷衍**（中川）

上の式をみて平均の式に似ていると感じて調べたところ、

調和平均が、2$\dfrac{ab}{a+b}$

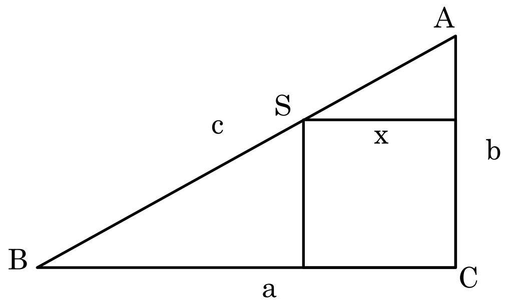
であった。

つまり、2x が a と b との調和平均を表すということである。



**作図問題**（中川）

直角三角形 ABC に図のように内接する正方形の頂点 S を作図せよ。




**解答**（中川）

半直線 CA 上に CB=CB'となる点 B'をとる。

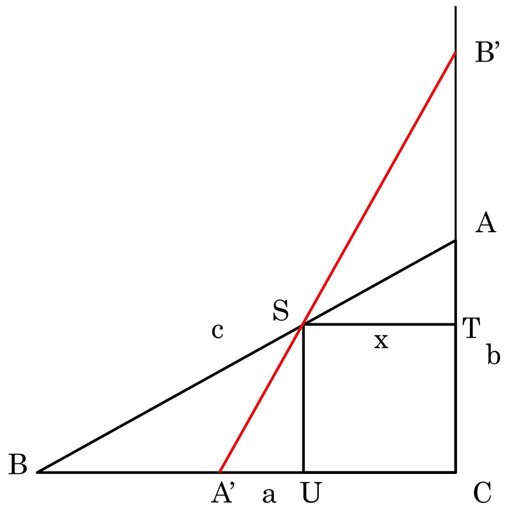
また、

半直線上 CB に、CA=CA'となる点 A'をとる。

AB と A'B'との交点が S である。

証明は直角三角形 SUB と直角三角形 STB'が合同であることから、

SU=ST で与えられる。

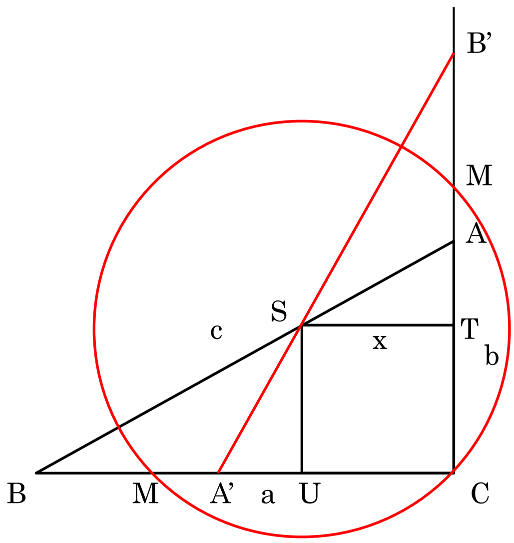



**敷衍**（中川）

S を中心とし、SC を半径とする円が

半直線 CB あるいは半直線 CB'と交わる点 M が

a と b の調和平均をあらわす。




**作図問題**（五輪）

図に線をもう一本描き足して、相加平均と調和平均の関係を示せ。

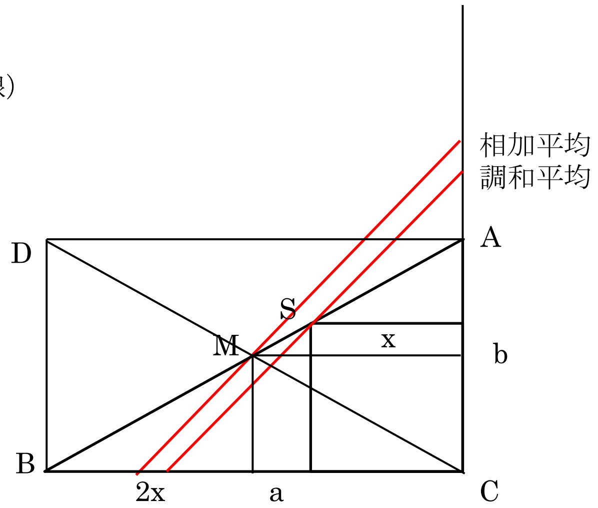
**解答**（中川）

長方形 BCAD の対角線の交点を M とする。

M を通る頂角Ｃの直角二等辺三角形（斜辺が赤線）

のＣを挟む二辺の長さは$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$であるから、

相加平均$\frac{a+b}{2}$を示す。




**敷衍**（中川）

相乗平均 $\sqrt{ab}$

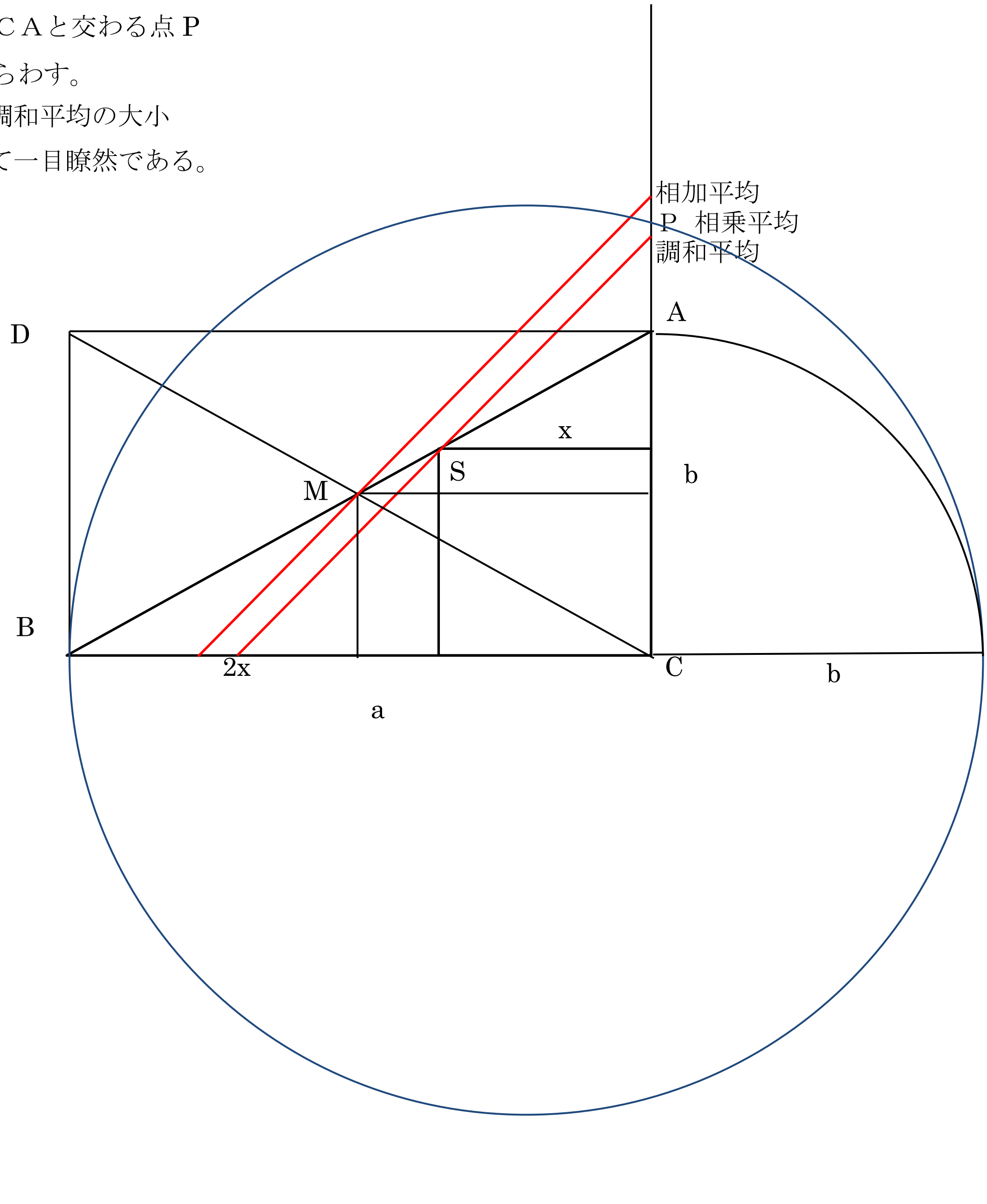
をも図示すると、右のようになる。

直径 a+b の円が半直線ＣＡと交わる点Ｐ

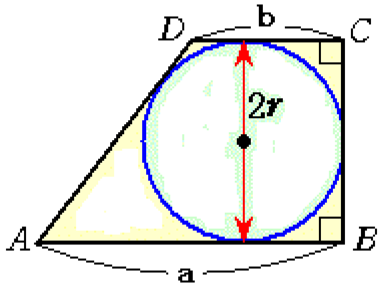
が相乗平均$\sqrt{ab}$　をあらわす。

相加平均・相乗平均・調和平均の大小

関係は半直線ＣＡ上にて一目瞭然である。



**関連問題**　「算法新書」（千葉胤秀、１８３０年）より

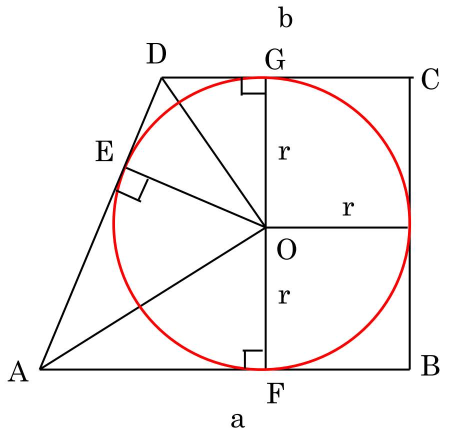



左図のような台形ＡＢＣＤに直径 2r の円が内接している。
このとき、

$2r=2\dfrac{ab}{a+b}$

が成り立つことを示せ。

**解答**（中川）




円 O は台形 ABCD に接しているから、
AF=AE
DE=DG
また、
OF=OE=r
OE=OG=r
よって三辺が等しい
△AOF≡△AOE
△DOE≡△DOG
したがって
∠AOF＝∠AOE
∠DOE＝∠DOG
∠AOF＋∠AOE＋∠DOE＋∠DOG＝2π　より、
∠AOE＋∠DOE＝π
よって
∠OAF=∠DOG
したがって
△AOF と△ODG は相似。
よって、
AF：OF＝OG：DG　すなわち
a－r：r＝r：b－r
$r^2=ab-(a+b)r+r^2$
よって、

$r==\dfrac{ab}{a+b}$

$2r=2\dfrac{ab}{a+b}$