和算にまなぶ（１）

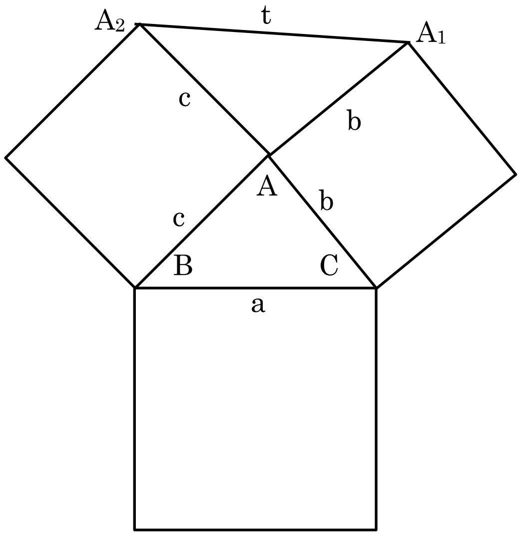
「日本の数学—何題解けますか？[下]」（深川英俊・ダン・ソコロフスキー著）７頁より

中川　宏

問題 7.3.2（「茨城県算額集」、松崎利雄、１９６７年）

三角形ＡＢＣの各辺を一辺とする正方形を、三角形の外側に作る。

図における辺A_1A_2の長さ t を三角形の三辺 a,b,c を用いて表せ。



解答

余弦定理より

$t^2=c^2+b^2-2bc\cos(180° - A)$

かつ

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

したがって

$t=\sqrt{(2b^2+2c^2-a^2)}$

敷衍（中川）

上記開平前の式は

$t^2=2b^2+2c^2-a^2$

移項して

$t^2+a^2=2b^2+2c^2$

右の図で、

$u=\sqrt{2}\cdot b$

$v=\sqrt{2}\cdot c$

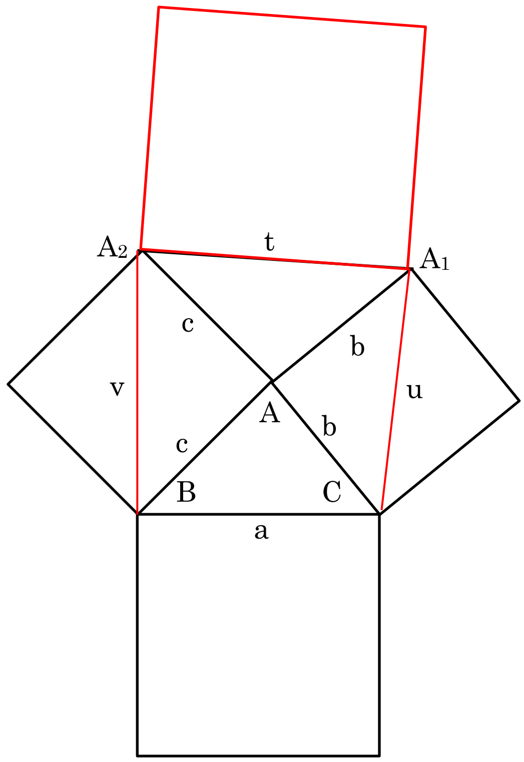
より、

$t^2+a^2=u^2+v^2$

これはピタゴラスの定理の四角形版が

四角形 BCA_1A_2 について成り立つ条件

を示していると理解できる。



発展問題（中川）

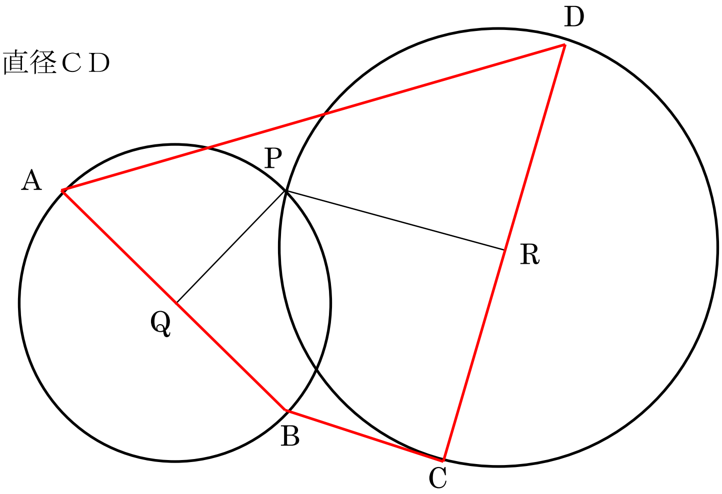
円Ｑと円Ｒが点Ｐほかで交わっている。

ＰＱに直交する直径ＡＢとＰＲに直交する直径ＣＤ

からなる四角形ＡＢＣＤにおいて、

$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$

となることを示せ。



解答（中川）

AB は円 Q の、CD は円 R のそれぞれ直径

であるから、∠ＡＰＢ＝∠ＣＰＤ＝直角

よって三平方の定理より、

$AB^2=AP^2+BP^2$

$CD^2=CP^2+DP^2$

また余弦定理より、

$BC^2= BP^2+CP^2-2BP\cdot CP\cos\angle BPC$

$AD^2= AP^2+DP^2-2AP\cdot DP\cos(2\pi-\angle BPC)$

PQ は AB と直交、PR は CD と直交

であったから、AP=BP、CP=DP

また、

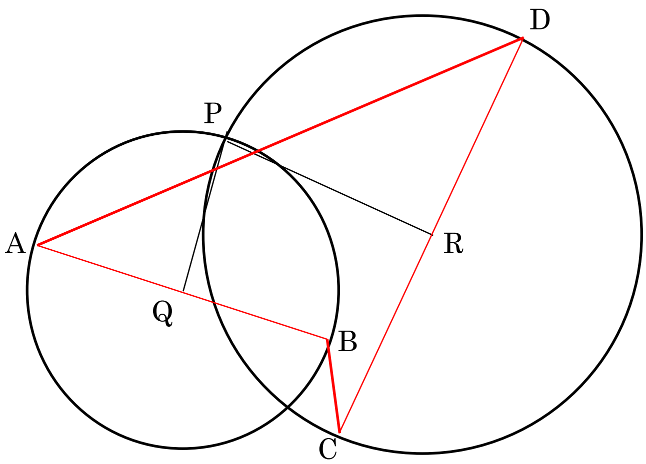
$\cos\angle BPC=-\cos(2\pi-\angle BPC)$

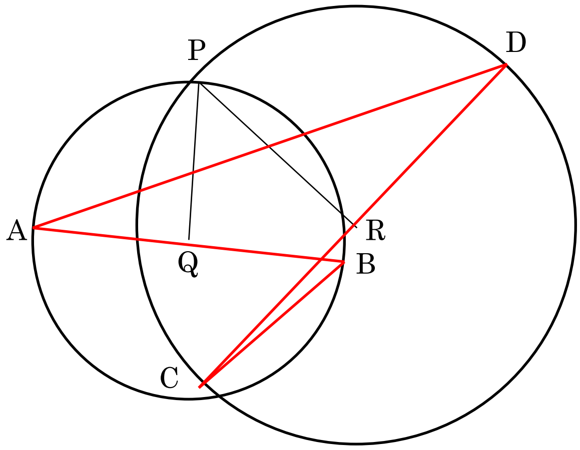
であるから、

$BC^2+AD^2= BP^2+CP^2 + AP^2+DP^2$

よって、

$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$



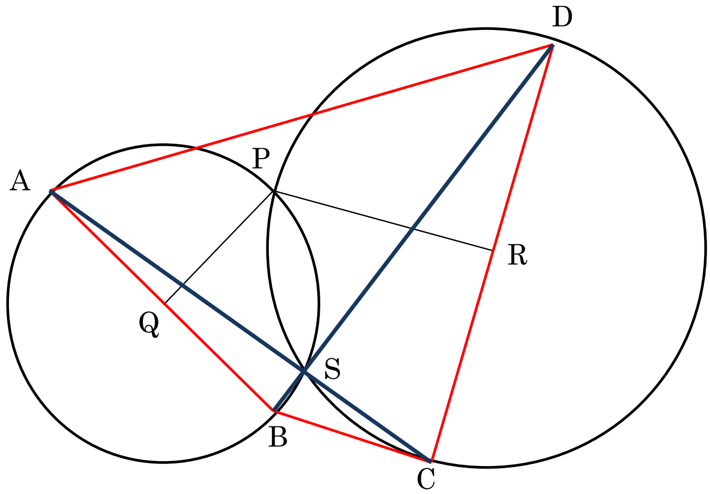


発展問題（五輪）

この四角形ＡＢＣＤの対角線ＡＣとＢＤが直交することを示せ。

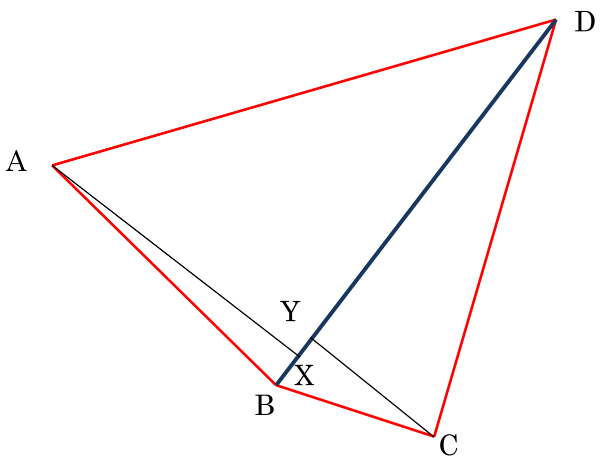
また、対角線の交点Ｓは、二円Ｑ，Ｒのもうひとつの交点であることを示せ。

さらに、ＡＣ＝ＢＤを示せ。



解答（中川）

対角線ＢＤに降ろしたＡからの垂線の足をＸ，Ｃから降ろした垂線の足をＹとおく。



$BX \leq BY$ と仮定する。

三平方の定理より、

$AB^2=AX^2+BX^2$

$CD^2=CY^2+DY^2$

$BC^2= CY^2+BY^2$

$AD^2=AX^2+DX^2$

$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$　であったから、

$AX^2+BX^2 +CY^2+DY^2= CY^2+BY^2+ AX^2+DX^2$

よって、

$BX^2 + DY^2= BY^2+ DX^2$

変形して、

$BX^2 - DX^2 = BY^2 - DY^2$

$(BX+DX)(BX - DX)=(BY+DY)(BY - DY)$

ここで $BX+DX=BY+DY=BD$ であるから、

$BX - DX= BY - DY$

$BX-BY=DX-DY$

$BX \leq BY$ の仮定より左辺≤ 0、右辺≥ 0 なので、

$BX=BY$、$DX=DY$

よってＸとＹは同じ点（Ｓ）であり、垂線の足という前提から対角線 AC はＢＤと直交する。

$\angle ASB=\angle CSD$=直角であるから、円周角の定理より、

点Ｓは円Ｑの円周上にあると同時に円Ｒの円周上にある。

よって点Ｓは点Ｐと対をなす二円Ｑ、Ｒのもうひとつの交点である。

△APC と△BPD において、

AP=BP

CP=DP

また、

∠APC=∠APB+∠BPC

∠BPD=∠BPC+∠CPD

∠APB=∠CPD=πより

∠APC=∠BPD

よって二辺夾角相同により、

△APC と△BPD とは合同。

（点Ｐを中心とする回転角は９０度。）

よって、

AC=BD