＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その６２）＞

$\pi^2/8$ に関する極限公式を新たに三つ見出したので下方に青色式で示す。なお、極限公式は多く出すぎたため、今回のものに関係ないグループは略した。$\pi^2/8$ のグループは過去のものをすべて示した。なおこれまで示していた＜Ｓ２－１３＞は＜Ｓ２－２＞と本質的に同値と気づき、これまでの＜Ｓ２－１３＞は今回発見したもので上書きしたので、了解いただきたい。

以降において、ζ(2)と$\pi^2/8$ の関係は次の通り。

$\zeta(2) = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \cdots = \pi^2/6$

$(3/4)\zeta(2) = 1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + \cdots = \pi^2/8$（ζ(2)と実質は同じ）

以降では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a は任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan,arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。sin, cos, tan は通常の表記である。

なお、lim での a->+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

◆$\dfrac{\pi^2}{8}$極限公式　(3ζ(2)/4 極限公式)

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\frac{1}{\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th2a}\cdot\mathrm{th3a}\cdot\mathrm{th4a}\cdots}\right) \quad \text{----<S2−1>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} 2a\cdot\log\left(\frac{1}{\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th3a}\cdot\mathrm{th5a}\cdot\mathrm{th7a}\cdots}\right) \quad \text{----<S2−2>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{2}{\mathrm{sh2a}}+\frac{4}{\mathrm{sh4a}}+\frac{6}{\mathrm{sh6a}}+\frac{8}{\mathrm{sh8a}}+\cdots\right) \quad \text{----<S2−3>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{3}{\mathrm{sh3a}}+\frac{5}{\mathrm{sh5a}}+\frac{7}{\mathrm{sh7a}}+\cdots\right) \quad \text{----<S2−4>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{sh2a}}+\frac{2}{\mathrm{sh3a}}+\frac{3}{\mathrm{sh4a}}+\frac{4}{\mathrm{sh5a}}+\cdots\right) \quad \text{----<S2−5>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch10a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch10a}-\mathrm{cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch14a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch14a}-\mathrm{cha}}\right)\cdots\right) \quad \text{---<S2−6>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} \left(\frac{a}{2}\right)\log\left(\left(\frac{\mathrm{cha}+\cos a}{\mathrm{cha}-\cos a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch3a}+\cos a}{\mathrm{ch3a}-\cos a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch5a}+\cos a}{\mathrm{ch5a}-\cos a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch7a}+\cos a}{\mathrm{ch7a}-\cos a}\right)\cdots\right) \quad \text{---<S2−7>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\left(\frac{ch4a+cha}{ch4a-cha}\right)\left(\frac{ch8a+cha}{ch8a-cha}\right)\left(\frac{ch12a+cha}{ch12a-cha}\right)\left(\frac{ch16a+cha}{ch16a-cha}\right)\cdot\cdot\right)$$ ---<S2−8>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\left(\tan^{-1}\left(\frac{sina}{sha}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{sina}{sh3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{sina}{sh5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{sina}{sh7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S2−9>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} 4a\left(th^{-1}\left(\frac{sha}{sh2a}\right)+3th^{-1}\left(\frac{sha}{sh6a}\right)+5th^{-1}\left(\frac{sha}{sh10a}\right)+7th^{-1}\left(\frac{sha}{sh14a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S2−10>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} 9a\left(th^{-1}\left(\frac{sha}{sh3a}\right)+3th^{-1}\left(\frac{sha}{sh9a}\right)+5th^{-1}\left(\frac{sha}{sh15a}\right)+7th^{-1}\left(\frac{sha}{sh21a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S2−11>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} 16a\left(th^{-1}\left(\frac{sha}{sh4a}\right)+3th^{-1}\left(\frac{sha}{sh12a}\right)+5th^{-1}\left(\frac{sha}{sh20a}\right)+7th^{-1}\left(\frac{sha}{sh28a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S2−12>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\frac{a}{3}\cdot\log\left(\left(\frac{cha}{cha-1}\right)\left(\frac{ch2a}{ch2a-1}\right)\left(\frac{ch3a}{ch3a-1}\right)\left(\frac{ch4a}{ch4a-1}\right)\left(\frac{ch5a}{ch5a-1}\right)\cdot\cdot\right)$$ ---<S2−13>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\frac{a^3}{4}\left(\frac{2\times1ch3a}{sh^2 3a}+\frac{3\times2ch4a}{sh^2 4a}+\frac{4\times3ch5a}{sh^2 5a}+\frac{5\times4ch6a}{sh^2 6a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S2−14>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\left(\frac{cha+1}{cha}\right)\left(\frac{ch2a+1}{ch2a}\right)\left(\frac{ch3a+1}{ch3a}\right)\left(\frac{ch4a+1}{ch4a}\right)\left(\frac{ch5a+1}{ch5a}\right)\cdot\cdot\right)$$ ---<S2−15>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\frac{4a^2}{3}\left(\frac{1}{ch2a\cdot tha}+\frac{2}{ch4a\cdot th2a}+\frac{3}{ch6a\cdot th3a}+\frac{4}{ch8a\cdot th4a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S2−16>

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

上記三つの青色式が得られた。Wolfram Alpha での数値検証でも式の正しさを確認している。

＜Ｓ２－１３＞と＜Ｓ２－１５＞は対称的な形になっていてきれいである。

今回は＜Ｓ２－１５＞の方の証明を以下に示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜S2—15＞の証明

下式[1]の左辺から出発する。その左辺を１３年前のこちらの 2012/8/16 の[導出]と類似的な方法を使って変形していくと[1]の右辺に到達する。途中でゼータの香りの漂う・・（その３８１）でのフーリエ級数の③を使う。（注意：フーリエ級数の表現を使っているが、それらは恒等式である）　この[1]は二変数の恒等式となっている。

$$\frac{sinx}{e^{a}-1}-\frac{sin2x}{e^{2a}-1}+\frac{sin3x}{e^{3a}-1}-\frac{sin4x}{e^{4a}-1}+-\cdot\cdot=\left(\frac{sinx}{2}\right)\left(\frac{1}{cha+cosx}+\frac{1}{ch2a+cosx}+\frac{1}{ch3a+cosx}+1\frac{1}{ch4a+cosx}+\cdot\cdot\right)$$ ---[1]

$(a>0,\ x$ は任意$)$

上式の両辺に対し、x について 0〜x まで積分して次式を得る。

$$\frac{1-\cos x}{e^{a}-1}-\frac{1-\cos 2x}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1-\cos 3x}{3(e^{3a}-1)}-\frac{1-\cos 4x}{4(e^{4a}-1)}+-\cdot\cdot=(1/2)\left(\log\left(\frac{\mathrm{ch}a+1}{\mathrm{ch}a+\cos x}\right)+\log\left(\frac{\mathrm{ch}2a+1}{\mathrm{ch}2a+\cos x}\right)+\log\left(\frac{\mathrm{ch}3a+1}{\mathrm{ch}3a+\cos x}\right)+\log\left(\frac{\mathrm{ch}4a+1}{\mathrm{ch}4a+\cos x}\right)+\cdot\cdot\right)\quad \text{--[2]}$$

$(a>0,\ x$ は任意$)$

上式で x に $\pi/2$ を代入して整理していくと次となる。

$$\frac{1}{e^{a}-1}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{5(e^{5a}-1)}+\frac{1}{7(e^{7a}-1)}+\cdot\cdot-2\left(\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{6(e^{6a}-1)}+\frac{1}{10(e^{10a}-1)}+\frac{1}{14(e^{14a}-1)}+\cdot\cdot\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}a+1}{\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+1}{\mathrm{ch}2a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+1}{\mathrm{ch}3a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+1}{\mathrm{ch}4a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}5a+1}{\mathrm{ch}5a}\right)\cdot\cdot\right)\quad \text{----[3]}$$

$(a>0)$

この[3]の両辺に a を掛けて（左辺は各項に掛ける）、a を+側から 0 に近づけていく。左辺はロピタルの定理を適用して整理すると $(1/2)\ (1+1/3^2+1/5^2+\cdot\cdot)=(1/2)\pi^2/8$ となり、目標の＜Ｓ２－１５＞に到達する。

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}a+1}{\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+1}{\mathrm{ch}2a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+1}{\mathrm{ch}3a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+1}{\mathrm{ch}4a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}5a+1}{\mathrm{ch}5a}\right)\cdot\cdot\right)\quad \text{---<S2-15>}$$

終わり。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして＜Ｓ２－１５＞が得られた。証明のポイントは[3]にわざわざ a を掛ける点である。このような操作はどの極限公式にも共通しており、それはこれまでも繰り返し示してきたことでもある。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝
●＜Ｓ２－１３＞と＜Ｓ２－１５＞を並べよう。

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\frac{a}{3}\cdot\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}a-1}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}2a-1}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}3a-1}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}4a-1}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}5a-1}\right)\cdot\cdot\right)\quad \text{---<S2-13>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}a+1}{\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+1}{\mathrm{ch}2a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+1}{\mathrm{ch}3a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+1}{\mathrm{ch}4a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}5a+1}{\mathrm{ch}5a}\right)\cdot\cdot\right)\quad \text{---<S2-15>}$$

なんともきれいである。こんなのがまだ残っていたのだ！ 証明中の[1]は私の中では第二別種 Sin 母等式という母等式になるのだが、これまでこの方面はあまり奥までは探索していなかったために未発見のものが残っていた・・というところである。それは三角関数と双曲線関数の融合域の二変数域に属することだが、二変数域でもまだ私が気づいておらず、見落としているようなことは数多くあるはずである。

●やっぱり数学は地中の探検に似ている。もうこの洞窟な探索しつくした！何も出ない！と思っても、しばらくしてよく見ると、小さな穴が見つかりそれが奥まで続いているということがよくある。いつも自分のバカさ加減と思い込みにあきれるのであるが、人間は固定観念に縛られしまうので、どうしてもそうなってしまう。

●数学の世界では、少年少女や主婦が数学者が見落としていたものを発見した！としてときどき話題になることがあるが、もはや私はちっとも驚かない。そんなこと当たり前！と思っている。数学者であろうが誰であろうが、何百人が通ってきた道にダイヤモンドが落ちているとは夢にも思わない。しかし、じっくりと細部を観察するというのはみんなあまりしないから(みな急ぐから)、上のようなことになりやすい。昔、「数学で新しいことを発見するには高校数学で十分だ！！」と言った数学者がいたが、それを聞いたとき、まさかそんなことはあるまい、最先端の数学をマスターしないと無理だろうと思ったが、現時点で自分が少々の発見をなしてきた道程をふり返って、その数学者の言葉は正しかった。

●そういうことがあるから教科書の中に居続けるというのはよくないし、最先端を追い続けるというのもまたよくないのである（奴隷のようになってしまう・・）。

こちらでも紹介したが再び。「数学のたのしみ」という雑誌 11 号で「数学まなびはじめ」というエッセーを数学者・岡本清郷氏（当時・名城大学）が書いている。なお、下記中の志村先生とは数学者の志村五郎氏のことである。

p.14 から引用。

****

・・・ 私が大阪大学の助手の頃、志村先生に「私の若い頃は机の上には本や雑誌などは置かないで、紙と鉛筆のみで研究したものだ」と言われたことがありました。最近になってやっとその意味が分かって来たような気がします。

名言１．数学の研究と魚釣りの原理

数学の研究は魚を釣るのに似ています。魚釣りをする場合、釣り竿、釣り糸、釣り針、餌などについての知識や魚の習性や居場所などの知識が必要です。しかし、これらについて知識を得るために、図書館に日参して勉強することも必要かもしれませんが、適当に勉強を切り上げて海や川へ出かけて行って実際に釣りをしなければ、いつまで経っても魚は釣れません。多くの人は、図書館に魚はいないのに、図書館で魚を釣ろうとしています。実際、その土地の子供たちは貧弱な釣り竿で立派に魚を釣っています。 ・・・・・・（略）

****

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2026.1.10 杉岡幹生

sugioka_m@mvb.biglobe.ne.jp

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)

・「数学のたのしみ」(1999 年 2 月号)