＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その６１）＞

ζ(2)つまり$\pi^2/6$に関する不等式の定理の四つ目を見出したので報告したい。それを$\pi^2/6$不等式-定理４と名付け、下方に青字で示した。それは極限公式とも関係しているため、まず先に過去に出した$\pi^2/6$極限公式（ζ(2)極限公式）を全て列挙し、次に発見した定理を示す。

ここで、$\pi^2/6$とζ(2)の関係は次の通りである。

$$\zeta(2)=1+1/2^2+1/3^2+1/4^2+\cdots=\pi^2/6$$

以下では、双曲線関数sinh, cosh, tanhはそれぞれsh, ch, thと略記した。例えば、sh2aはsinh(2a)のことである。aは任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1}はそれぞれarctan,arctanhである。logは自然対数、eは自然対数の底。sin, cos, tanは通常の表記である。

なお、limでのa->+0はaをプラス側から0に近づける意味である。

==

◆$\dfrac{\pi^2}{6}$極限公式（ζ(2)極限公式）

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdots}\right) \qquad \text{----<S3>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdots\right) \qquad \text{---<S3-2>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdots\right) \qquad \text{---<S3-3>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^2\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{5}{e^{5a}+1}+\frac{7}{e^{7a}+1}+\cdots\right) \qquad \text{----<S3-4>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\frac{1}{e^a-1}+\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}+\frac{7}{e^{7a}-1}+\cdots\right) \qquad \text{----<S3-5>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^2\left(\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdots\right) \qquad \text{----<S3-6>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{5^2}{\mathrm{ch}^2 5a}+\frac{7^2}{\mathrm{ch}^2 7a}+\cdots\right) \qquad \text{---<S3-7>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{7^2}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdots\right) \qquad \text{---<S3-8>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{2}{e^{2a}+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{4}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right) \quad ----<S3-9>$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a\cdot\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})\cdot\cdot\right) \quad ----<S3-10>$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})(1-e^{-5a})(1-e^{-7a})\cdot\cdot}\right) \quad ----<S3-11>$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a\cdot\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-2a})(1+e^{-3a})(1+e^{-4a})\cdot\cdot\right) \quad ----<S3-12>$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\left(\frac{1}{th2a}-1\right)+2\left(\frac{1}{th3a}-1\right)+3\left(\frac{1}{th4a}-1\right)+4\left(\frac{1}{th5a}-1\right)+\cdot\cdot\right) \quad --<S3-13>$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^2\left((1-th2a)+2(1-th3a)+3(1-th4a)+4(1-th5a)+\cdot\cdot\right) \quad --<S3-14>$$

==================================

上の＜S3－11＞式に関連して、次の$\pi^2/6$ 不等式-定理 4 を見出した。

$\pi^2/6$ 不等式-定理 4

次の (1), (2) が成り立つ。

(1) 任意の正の実数 a について、次の不等式①と②が成り立つ。

$$a\left(\frac{1}{sha}+\frac{1}{2sh2a}+\frac{1}{3sh3a}+\frac{1}{4sh4a}+\cdot\cdot\right)<\frac{\pi^2}{6} \quad -----①$$

$$(a>0)$$

$$2a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})(1-e^{-5a})(1-e^{-7a})\cdot\cdot}\right)<\frac{\pi^2}{6} \quad ------②$$

$$(a>0)$$

(2) ①と②は上式の形で最良である。すなわち、右辺が$\pi^2/6$ より僅かでも小さい場合、(1) は成り立たない。

この定理の証明はこちらの３回（ここ と ここ と こちら）で示した証明と類似のものになるので略す。なお、Wolfram Alpha による数値検証でもこの定理の正しさを確認している。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●今回の定理を再掲する。

$\pi^2/6$ 不等式-定理 4

次の(1), (2)が成り立つ。

(3) 任意の正の実数 a について、次の不等式①と②が成り立つ。

$$a\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{1}{2\mathrm{sh}2a}+\frac{1}{3\mathrm{sh}3a}+\frac{1}{4\mathrm{sh}4a}+\cdot\cdot\right)<\frac{\pi^2}{6} \qquad \text{-----①}$$

$$(a>0)$$

$$2a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})(1-e^{-5a})(1-e^{-7a})\cdot\cdot}\right)<\frac{\pi^2}{6} \qquad \text{-----②}$$

$$(a>0)$$

(4) ①と②は上式の形で最良である。すなわち、右辺が$\pi^2/6$ より僅かでも小さい場合、(1)は成り立たない。

この定理を眺めると、①左辺の()内は、ゼータの香りが漂う式となっていて面白い。ゼータの香りの漂う式というのは、独断と偏見で言えば、ゼータ関数よりももっと深いところから来ているものであり、その面白さはゼータの比ではない！ 一方、②左辺の log 内には、テータ関数（可積分系とコマ（その１７））と本質的に同じようなものが出ていて重要である。

また①、②の不等式の最良形が、ζ(2)特殊値の$\pi^2/6$ で規定されている点も大事である。それは興味ある何かを暗示している気がするが、何かとは何だろうか。また$\pi^2/6$ というのは $1+1/2^2+1/3^2+1/4^2+\cdot\cdot$ から出てきたものなので、①、②の両辺を定数倍したりするのは、ゼータの気持ちに反するものとなり（数学的に同じであっても）よいことではない！

さて、この定理は、上方での＜Ｓ３－１１＞式つまり次式に密接に関連している。

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})(1-e^{-5a})(1-e^{-7a})\cdot\cdot}\right) \qquad \text{----<S3-11>}$$

不等式定理を発見する前に、私はこの種の極限公式を大量に見出してきたわけだが、極限公式というのは行きつくところまでいった断崖絶壁の端にあるものであり、これに行き着くまでの途上に、それぞれの極限公式に対応する不等式の定理という花園が存在する。そのことに私はかなり後から（最近）気づいた。その気づきがあったので、多くある花園で証明ができたものから提示していっているのが今の状況である。ただし、その花園（不等式定理）の証明は難しいものが多く、簡単に証明できるものは少ないことがわかってきた。数値計算的に「絶対に正しい」という予想は多く出るのだが、予想ばかり出してもなんなので証明できたものから示していっている。つまり、数少ない簡単に証明できるものが、これまで示してきた$\pi^2/6$ 不等式-定理 1～定理 4 であり、$\pi^2/8$ 不等式-定理 1～定理 2 ということになる。

極限公式は割合簡単に証明できるのに、それに対応して存在する不等式の定理の証明が簡単ではないというのも面白いことである。

●上記の不等式定理と極限公式はじつは次の恒等式を故郷として、そこからやってきている。

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{1}{2\mathrm{sh}2a}+\frac{1}{3\mathrm{sh}3a}+\frac{1}{4\mathrm{sh}4a}+\cdot\cdot=2\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})(1-e^{-5a})(1-e^{-7a})\cdot\cdot}\right)$$

$(a>0)$

さて、前々回で見た次の二つの恒等式も並べてみたい（log の式は同値変形した）。

$$\frac{1}{\mathrm{sh}2a}+\frac{1}{3\mathrm{sh}6a}+\frac{1}{5\mathrm{sh}10a}+\frac{1}{7\mathrm{sh}14a}+\cdot\cdot=\log\left(\frac{1}{\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th}3a\cdot\mathrm{th}5a\cdot\mathrm{th}7a\cdot\mathrm{tha}9a\cdots}\right)$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^2a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot\right)$$

$(a>0)$

この三式はいずれもいっぷくの水墨画のような趣をたたえている。どれもよいが、深みという点で三式を比較すると、１番目と２番目が最も深い。一番下の式は、もっと浅いところからきている。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2026.1.05 杉岡幹生

sugioka_m@mvb.biglobe.ne.jp

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）

・可積分系とコマ（その１７）