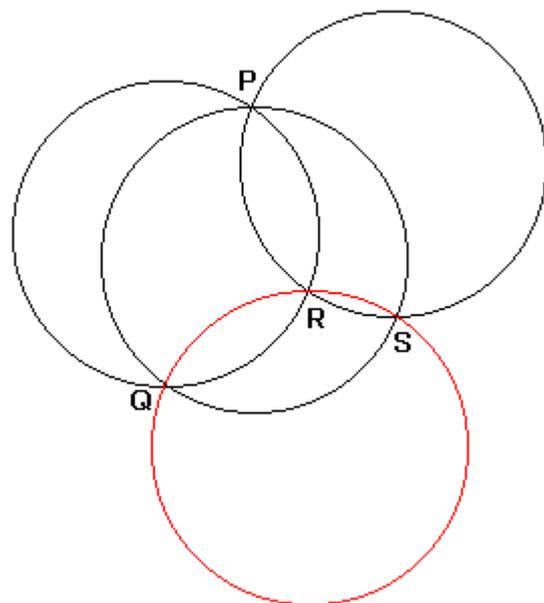


### 3つの円の共通弦と三角形の5心(その8)

中川宏

ジョンソンの定理:

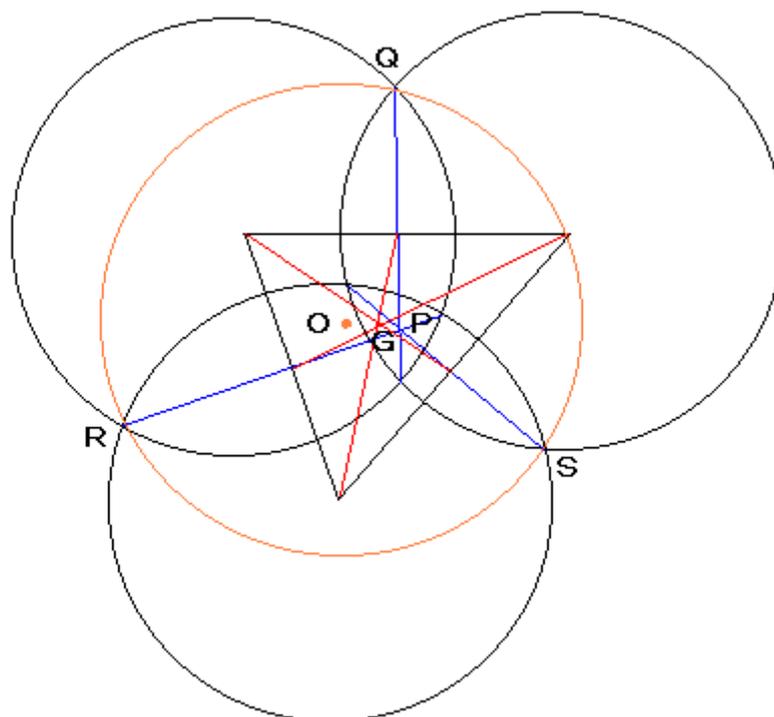
互いに2点で交わっているおなじ大きさの3円が、1点Pを共有しているとき、他の3つの円の交点(P, Q, R)はおなじ大きさの別の円の上には存在している。



という美しい定理が発見されたのが1916年頃だというのは、初等幾何の奥深さを象徴する逸話でしょう。

さて、3つのおなじ大きさの円が4点ではなく一般に6点で交わっているときには、どのような関係があるでしょうか。

右の図において、

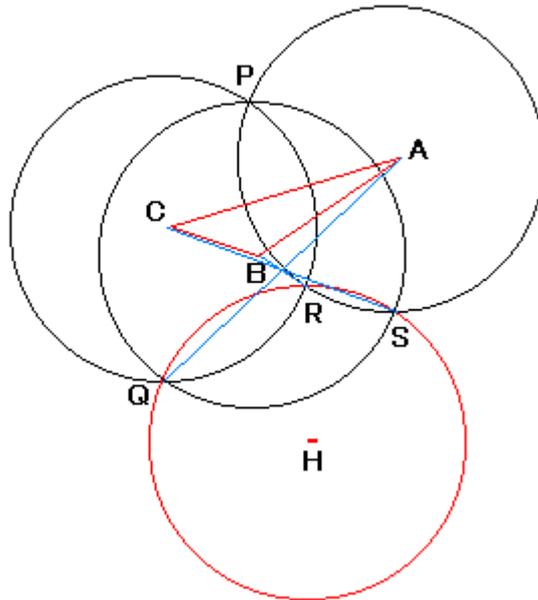


点Pは3本の根軸の交点つまり根心です。  
 点Gは3つの円の中心からなる三角形の重心です。そして、  
 点Oは3つの円の外側の交点P, Q, Rを通る円の中心です。

すると、R, G, Oは一直線上に並んでいるようにも見えます。また、ひょつとすると点Gは線分POの midpoint かもしれません。  
 しかし定規とコンパスによる作図には誤差がつきまとい、確かめる術がないと感じましたので、一松先生のお力をお借りすることになりました。

一松先生からのご回答

1. 第1の形(3円が同一点Pを通る)のとき、他の交点Q, R, Sを通る円の中心は、3円の中心A, B, Cの作る三角形の垂心でした。  
 このときAQ, BR, CSは共通点で交わり、それは△ABCの九点円の中心(外心と垂



心の中点)になります。

2. 一般の場合、内側の交点Q', R', S'をも考えて、交点の組み合わせ計 $2^3=8$ とおりについて、それらを通る円の中心を作りQ', R', S'を同一点Pに近づけた極限を考えると、8個の円のうち6個は△ABCの頂点および辺の中点に近づき、内側の小円は点P(△ABCの外心)、外側のQRSを通る大きい円の中心は上述の垂心に近づきます。

3. したがって円が少しずれてPを根心とする第2の形になったとき、外側の交点Q, R, Sを通る円の中心は $\triangle ABC$ の垂心の近くに位置します。ただしEuler線上に載るとは限りません。たまたま図によっては重心の対する外心の対称点の近くに位置することがあり(貴兄の図)ますが、その点のなるとは限らないようです。

4. 外側のQ, R, Sを通る円の中心がEuler線上に載るのはどういう場合か、など考えてみるべき課題はいろいろありますが、大体の事情は上述の解釈で一応納得できました。

たいへんかもしれませんが、やはりいくつかの図を描いて比較してみることが必要と感じた次第です。

一松 信

このように、一松先生には私が見間違いをしてしまった原因まで明らかにしていただきました。ほんとうにありがとうございました。