

$1 + 1 = 2$ である必然性はあるのか？

以下の計算方法だと、 $1 + 1 = 3$ (①で $\alpha = 1$) でもよいことになる。

交換律、結合律、分配律が、成り立つ演算について考えてみます。

他にも、2 項演算として、トロピカル幾何というのがあるそうですが。

複素数体上で 2 項演算を定義する。

$$C \times C : (z_1, z_2) \rightarrow z_3 \in C, \alpha \in C$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} z_1 \oplus z_2 = z_1 + z_2 + \alpha \\ z_1 \otimes z_2 = (z_1 + \alpha)(z_2 + \alpha) - \alpha \end{cases} \quad \text{と定義した場合、}$$

$\oplus$ 和の単位元は、

$$\forall z_1 \in C, z_1 \oplus z_2 = z_1, \quad \text{より } z_1 + z_2 + \alpha = z_1 \quad \text{つまり、} z_2 = -\alpha \quad \text{とすればよい。}$$

$\otimes$ 積の単位元は、

$$\forall z_1 \in C, z_1 \otimes z_2 = z_1, \quad \text{より } (z_1 + \alpha)(z_2 + \alpha) - \alpha = z_1 \quad \text{つまり、} z_2 = 1 - \alpha \quad \text{とすればよい。}$$

交換律は、明らかに成り立つ。

結合律が、成り立つ。

$$z_1 \oplus (z_2 \oplus z_3) = z_1 \oplus (z_2 + z_3 + \alpha) = z_1 + z_2 + z_3 + \alpha + \alpha$$

$$(z_1 \oplus z_2) \oplus z_3 = (z_1 + z_2 + \alpha) \oplus z_3 = z_1 + z_2 + \alpha + z_3 + \alpha$$

$$z_1 \oplus (z_2 \oplus z_3) = (z_1 \oplus z_2) \oplus z_3$$

$$\begin{aligned} z_1 \otimes (z_2 \otimes z_3) &= z_1 \otimes \{(z_2 + \alpha)(z_3 + \alpha) - \alpha\} = (z_1 + \alpha)\{(z_2 + \alpha)(z_3 + \alpha) - \alpha + \alpha\} - \alpha \\ &= (z_1 + \alpha)(z_2 + \alpha)(z_3 + \alpha) - \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (z_1 \otimes z_2) \otimes z_3 &= \{(z_1 + \alpha)(z_2 + \alpha) - \alpha\} \otimes z_3 = \{(z_1 + \alpha)(z_2 + \alpha) - \alpha + \alpha\}(z_3 + \alpha) - \alpha \\ &= (z_1 + \alpha)(z_2 + \alpha)(z_3 + \alpha) - \alpha \end{aligned}$$

$$z_1 \otimes (z_2 \otimes z_3) = (z_1 \otimes z_2) \otimes z_3$$

分配律が、成り立つ。

$$z_1 \otimes (z_2 \oplus z_3) = z_1 \otimes (z_2 + z_3 + \alpha) = (z_1 + \alpha)(z_2 + z_3 + \alpha + \alpha) - \alpha$$

$$(z_1 \otimes z_2) \oplus (z_1 \otimes z_3) = \{(z_1 + \alpha)(z_2 + \alpha) - \alpha\} \oplus \{(z_1 + \alpha)(z_3 + \alpha) - \alpha\}$$

$$= (z_1 + \alpha)(z_2 + \alpha) - \alpha + (z_1 + \alpha)(z_3 + \alpha) - \alpha + \alpha$$

$$= (z_1 + \alpha)\{(z_2 + \alpha) + (z_3 + \alpha)\} - \alpha = (z_1 + \alpha)(z_2 + z_3 + 2\alpha) - \alpha$$

$$z_1 \otimes (z_2 \oplus z_3) = (z_1 \otimes z_2) \oplus (z_1 \otimes z_3)$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} z_1 \oplus z_2 = z_1 + z_2 \\ z_1 \otimes z_2 = z_1 z_2 e^{-i\alpha} \end{cases} \quad \text{と定義した場合}$$

$\oplus$ の単位元

$$\forall z_1, z_1 \oplus z_2 = z_1 \text{より } z_1 + z_2 = z_1, \text{つまり } z_2 = 0$$

$\otimes$ の単位元

$$\forall z_1, z_1 \otimes z_2 = z_1 \text{より } z_1 z_2 e^{-i\alpha} = z_1, \text{つまり } z_2 = e^{i\alpha}$$

交換律、明らか

結合律が成り立つ

$\oplus$ の結合律は明らか

$\otimes$ の結合律

$$z_1 \otimes (z_2 \otimes z_3) = z_1 \otimes z_2 z_3 e^{-i\alpha} = z_1 z_2 z_3 e^{-i\alpha} \cdot e^{-i\alpha} = z_1 z_2 z_3 e^{-2i\alpha}$$

$$(z_1 \otimes z_2) \otimes z_3 = z_1 z_2 e^{-i\alpha} \otimes z_3 = z_1 z_2 e^{-i\alpha} z_3 \cdot e^{-i\alpha} = z_1 z_2 z_3 e^{-2i\alpha}$$

$$z_1 \otimes (z_2 \otimes z_3) = (z_1 \otimes z_2) \otimes z_3$$

分配律が成り立つ

$$z_1 \otimes (z_2 \oplus z_3) = z_1 (z_2 + z_3) e^{i\alpha} = z_1 z_2 e^{i\alpha} + z_1 z_3 e^{i\alpha} = z_1 \otimes z_2 \oplus z_1 \otimes z_3$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} z_1 \oplus z_2 = \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ z_1 \otimes z_2 = \overline{z_1} \times \overline{z_2} \end{cases} \quad \text{と定義すると}$$

交換律、結合律、分配律は明らか。

① は併進タイプ②回転タイプ③は実軸対称（一般の直線に対しても可能）

その他、これらの合成も、考えられます。

① のときは、不動点がなく、

② のときは、不動点は、1つ

③ のときは、不動点は、無限にある