

ゼータの香りの漂う式（その6）

ここでは $\pi/4$ と $3\pi/4$ と $5\pi/4$ と $7\pi/4$ を代入した場合を調べる。フーリエ級数

$$(\pi - x)/2 = \sin x/1 + \sin 2x/2 + \sin 3x/3 + \sin 4x/4 + \cdots \quad (0 < x < 2\pi)$$

の両辺に $\int_{(0 \sim x)} e^{ax}$ を作用させて得られる式の x に $\pi/4$ と $3\pi/4$ と $5\pi/4$ と $7\pi/4$ を代入すると、次の2式が導出される。ここで a は任意の実数である。

$$\begin{aligned} & \{1/(1^2+a^2) + 3/(3^2+a^2) - 5/(5^2+a^2) - 7/(7^2+a^2)\} \\ & + \{9/(9^2+a^2) + 11/(11^2+a^2) - 13/(13^2+a^2) - 15/(15^2+a^2)\} + \cdots \\ & = (\pi/(2\sqrt{2})) \cdot (e^{(7a\pi/4)} + e^{(5a\pi/4)} - e^{(3a\pi/4)} - e^{(a\pi/4)}) / (e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{1/(1^2+a^2) - 1/(3^2+a^2) - 1/(5^2+a^2) + 1/(7^2+a^2)\} \\ & + \{1/(9^2+a^2) - 1/(11^2+a^2) - 1/(13^2+a^2) + 1/(15^2+a^2)\} + \cdots \\ & = (\pi/(2a\sqrt{2})) \cdot (e^{(7a\pi/4)} - e^{(5a\pi/4)} - e^{(3a\pi/4)} + e^{(a\pi/4)}) / (e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1/(4^2+a^2) - 1/(8^2+a^2) + 1/(12^2+a^2) - 1/(16^2+a^2) + \cdots \\ & = 1/(2a^2) - (\pi/(4a)) \cdot (e^{(7a\pi/4)} + e^{(5a\pi/4)} + e^{(3a\pi/4)} + e^{(a\pi/4)}) / (e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2/(2^2+a^2) - 6/(6^2+a^2) + 10/(10^2+a^2) - 14/(14^2+a^2) + \cdots \\ & = (\pi/4) \cdot (e^{(7a\pi/4)} - e^{(5a\pi/4)} + e^{(3a\pi/4)} - e^{(a\pi/4)}) / (e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

$L(\chi, s)$ ゼータの香りが漂っていることがわかるであろう。これらの導出過程を以下に示す。

【導出】

フーリエ級数

$$(\pi - x)/2 = \sin x/1 + \sin 2x/2 + \sin 3x/3 + \sin 4x/4 + \cdots \quad \text{----①}$$

$$(0 < x < 2\pi)$$

を出発点とする。①の左右両辺に作用素 $\int_{(0 \sim x)} e^{ax}$ を作用させて(後ろに dx は付く)、求めていく。

まず①の左辺に $\int_{(0 \sim x)} e^{ax}$ を作用させる。

$$\int_{(0 \sim x)} e^{ax} \cdot (\pi - x)/2 \, dx = ((x - \pi)/(2a)) \cdot e^{ax} - \pi/(2a) + (e^{ax} - 1)/(2a^2) \quad \text{----②}$$

次に①の右辺に着目する。まず $\sin(nx)/n$ に作用素を適用すると(部分積分を2回行つて)

$$\begin{aligned} & \int_{(0 \sim x)} e^{ax} \cdot (\sin(nx)/n) \, dx \\ & = a \cdot \sin(nx) \cdot e^{ax} / (n(n^2+a^2)) - \cos(nx) \cdot e^{ax} / (n^2+a^2) + 1/(n^2+a^2) \quad \text{----③} \end{aligned}$$

となる。①の右辺の各項に項別積分を適用して次を得る。

$$\int_{(0 \sim x)} e^{ax} \cdot \sum_{(n=1 \sim \infty)} (\sin(nx)/n) \, dx$$

$$=\sum_{n=1\sim\infty}\{1/(n^2+a^2)-\cos(nx)\cdot e^{(ax)/(n^2+a^2)}-a\cdot\sin(nx)\cdot e^{(ax)/(n(n^2+a^2))}\} \quad \text{----④}$$

①の両辺に $\int_{(0\sim x)} e^{(ax)}$ を作用させた結果が②と④であるから②=④となつて、

$$((x-\pi)/(2a))\cdot e^{(ax)}-\pi/(2a)+(e^{(ax)}-1)/(2a^2) \\ =\sum_{n=1\sim\infty}\{1/(n^2+a^2)-\cos(nx)\cdot e^{(ax)/(n^2+a^2)}-a\cdot\sin(nx)\cdot e^{(ax)/(n(n^2+a^2))}\} \quad \text{----⑤}$$

ここで⑤に x に $\pi/4$ を代入して整理すると次のようになる。

$$(\sqrt{2}/2)\cdot A1+A2+(\sqrt{2}/2)aB1-aB2=\pi\cdot e^{(-a\pi/4)}-1/(2a)+\pi\cdot e^{(-a\pi/4)}/(e^{(2a\pi)}-1) \quad \text{----⑥}$$

ここで⑤に x に $3\pi/4$ を代入して整理すると次のようになる。

$$-(\sqrt{2}/2)\cdot A1+A2+(\sqrt{2}/2)aB1+aB2=-\pi\cdot e^{(-3a\pi/4)}+1/(2a)-\pi\cdot e^{(-3a\pi/4)}/(e^{(2a\pi)}-1) \quad \text{----⑦}$$

ここで⑤に x に $5\pi/4$ を代入して整理すると次のようになる。

$$(\sqrt{2}/2)\cdot A1-A2+(\sqrt{2}/2)aB1+aB2=-\pi\cdot e^{(-5a\pi/4)}+1/(2a)-\pi\cdot e^{(-5a\pi/4)}/(e^{(2a\pi)}-1) \quad \text{----⑧}$$

ここで⑤に x に $7\pi/4$ を代入して整理すると次のようになる。

$$(\sqrt{2}/2)\cdot A1+A2-(\sqrt{2}/2)aB1+aB2=-\pi\cdot e^{(-7a\pi/4)}+1/(2a)-\pi\cdot e^{(-7a\pi/4)}/(e^{(2a\pi)}-1) \quad \text{----⑨}$$

ここで、 $A1, B1, A2, B2$ は以下の通り。

$$A1=\{1/(1^2+a^2)+3/(3^2+a^2)-5/(5^2+a^2)-7/(7^2+a^2) \\ +\{9/(9^2+a^2)+11/(11^2+a^2)-13/(13^2+a^2)-15/(15^2+a^2)\}+\dots \\ B1=\{1/(1^2+a^2)-1/(3^2+a^2)-1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2) \\ +\{1/(9^2+a^2)-1/(11^2+a^2)-1/(13^2+a^2)+1/(15^2+a^2)\}+\dots \\ A2=2/(2^2+a^2)-6/(6^2+a^2)+10/(10^2+a^2)-14/(14^2+a^2)+\dots \\ B2=1/(4^2+a^2)-1/(8^2+a^2)+1/(12^2+a^2)-1/(16^2+a^2)+\dots$$

⑥～⑨の連立方程式を解くと冒頭で示した式が導出できる。

【終わり】

フーリエ級数

$$(\pi-x)/2=\sin x/1+\sin 2x/2+\sin 3x/3+\sin 4x/4+\dots \quad (0<x<2\pi)$$

を用いて様々な「ゼータの香りの漂う式」を導いてきたが、上式を出発点とした式の導出はこれくらいにしておきたい。

これまでの結果も合わせてまとめておこう。

フーリエ級数 $(\pi - x)/2 = \sin x/1 + \sin 2x/2 + \sin 3x/3 + \sin 4x/4 + \dots$ $(0 < x < 2\pi)$

に $\int_{(0 \sim x)} e^{ax}$ を作用させ x にある数を代入すると、以下の式が得られる。(a は任意の実数)

[2 π 代入]

$$1/(1^2+a^2) + 1/(2^2+a^2) + 1/(3^2+a^2) + 1/(4^2+a^2) + \dots = -1/(2a^2) + (\pi/(2a)) \cdot (e^{(2a\pi)+1})/(e^{(2a\pi)}-1)$$

[π 代入]

$$1/(1^2+a^2) + 1/(3^2+a^2) + 1/(5^2+a^2) + 1/(7^2+a^2) + \dots = (\pi/(4a)) \cdot (e^{(a\pi)}-1)/(e^{(a\pi)}+1)$$

$$1/(2^2+a^2) + 1/(4^2+a^2) + 1/(6^2+a^2) + 1/(8^2+a^2) + \dots = -1/(2a^2) + (\pi/(4a)) \cdot (e^{(a\pi)}+1)/(e^{(a\pi)}-1)$$

[($\pi/2$)&(3 $\pi/2$)代入]

$$1/(2^2+a^2) - 1/(4^2+a^2) + 1/(6^2+a^2) - 1/(8^2+a^2) + \dots = 1/(2a^2) - (\pi/(2a)) \cdot (e^{(3a\pi/2)}+e^{(a\pi/2)})/(e^{(2a\pi)}-1)$$

$$1/(1^2+a^2) - 3/(3^2+a^2) + 5/(5^2+a^2) - 7/(7^2+a^2) + \dots = (\pi/2) \cdot (e^{(3a\pi/2)}-e^{(a\pi/2)})/(e^{(2a\pi)}-1)$$

[($\pi/3$)代入 & (5 $\pi/3$)代入]

$$\{1/(1^2+a^2) + 2/(2^2+a^2) - 4/(4^2+a^2) - 5/(5^2+a^2)\} \\ + \{7/(7^2+a^2) + 8/(8^2+a^2) - 10/(10^2+a^2) - 11/(11^2+a^2)\} + \dots = (\pi/\sqrt{3}) \cdot (e^{(5a\pi/3)}-e^{(a\pi/3)})/(e^{(2a\pi)}-1)$$

$$1/(3^2+a^2) - 1/(6^2+a^2) + 1/(9^2+a^2) - 1/(12^2+a^2) + \dots = 1/(2a^2) - (\pi/(3a)) \cdot (e^{(a\pi/3)}+e^{(a\pi)}+e^{(5a\pi/3)})/(e^{(2a\pi)}-1)$$

[($\pi/4$)代入 & (3 $\pi/4$)代入 & (5 $\pi/4$)代入 & (7 $\pi/4$)代入]

$$\{1/(1^2+a^2) + 3/(3^2+a^2) - 5/(5^2+a^2) - 7/(7^2+a^2)\} + \{9/(9^2+a^2) + 11/(11^2+a^2) - 13/(13^2+a^2) - 15/(15^2+a^2)\} + \dots \\ = (\pi/(2\sqrt{2})) \cdot (e^{(7a\pi/4)}+e^{(5a\pi/4)}-e^{(3a\pi/4)}-e^{(a\pi/4)})/(e^{(2a\pi)}-1)$$

$$\{1/(1^2+a^2) - 1/(3^2+a^2) - 1/(5^2+a^2) + 1/(7^2+a^2)\} + \{1/(9^2+a^2) - 1/(11^2+a^2) - 1/(13^2+a^2) + 1/(15^2+a^2)\} + \dots \\ = (\pi/(2a\sqrt{2})) \cdot (e^{(7a\pi/4)}-e^{(5a\pi/4)}-e^{(3a\pi/4)}+e^{(a\pi/4)})/(e^{(2a\pi)}-1)$$

$$1/(4^2+a^2) - 1/(8^2+a^2) + 1/(12^2+a^2) - 1/(16^2+a^2) + \dots \\ = 1/(2a^2) - (\pi/(4a)) \cdot (e^{(7a\pi/4)}+e^{(5a\pi/4)}+e^{(3a\pi/4)}+e^{(a\pi/4)})/(e^{(2a\pi)}-1)$$

$$2/(2^2+a^2) - 6/(6^2+a^2) + 10/(10^2+a^2) - 14/(14^2+a^2) + \dots = (\pi/4) \cdot (e^{(7a\pi/4)}-e^{(5a\pi/4)}+e^{(3a\pi/4)}-e^{(a\pi/4)})/(e^{(2a\pi)}-1)$$

(杉岡幹生)

