

ゼータの香りの漂う式（その5）

今回は、 $2\pi/3$ と $4\pi/3$ を代入した場合を調べる。フーリエ級数

$$(\pi-x)/2 = \sin x/1 + \sin 2x/2 + \sin 3x/3 + \sin 4x/4 + \cdots \quad (0 < x < 2\pi)$$

の両辺に $\int_{(0\sim x)} e^{(ax)}$ を作用させて得られる式の x に $2\pi/3$ と $4\pi/3$ を代入すると、次の2式が導出される。

ここで a は任意の実数である。

$$\begin{aligned} & \{1/(1^2+a^2) - 2/(2^2+a^2) + 4/(4^2+a^2) - 5/(5^2+a^2)\} \\ & + \{7/(7^2+a^2) - 8/(8^2+a^2) + 10/(10^2+a^2) - 11/(11^2+a^2)\} + \cdots \\ & = (\pi/\sqrt{3}) \cdot (e^{(4a\pi/3)} - e^{(2a\pi/3)}) / (e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1/(3^2+a^2) + 1/(6^2+a^2) + 1/(9^2+a^2) + 1/(12^2+a^2) + \cdots \\ & = -1/(2a^2) + \pi/(6a) + (\pi/(3a)) \cdot (1 + e^{(2a\pi/3)} + e^{(4a\pi/3)}) / (e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

試しに a に 2 を代入すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \{1/(1^2+4) - 2/(2^2+4) + 4/(4^2+4) - 5/(5^2+4)\} \\ & + \{7/(7^2+4) - 8/(8^2+4) + 10/(10^2+4) - 11/(11^2+4)\} + \cdots \\ & = (\pi/\sqrt{3}) \cdot (e^{(8\pi/3)} - e^{(4\pi/3)}) / (e^{(4\pi)} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1/(3^2+4) + 1/(6^2+4) + 1/(9^2+4) + 1/(12^2+4) + \cdots \\ & = -1/8 + \pi/12 + (\pi/6) \cdot (1 + e^{(4\pi/3)} + e^{(8\pi/3)}) / (e^{(4\pi)} - 1) \end{aligned}$$

これらの導出過程を以下に示す。

【導出】

フーリエ級数

$$(\pi-x)/2 = \sin x/1 + \sin 2x/2 + \sin 3x/3 + \sin 4x/4 + \cdots \quad \text{----①}$$

$$(0 < x < 2\pi)$$

を出発点とする。①の左右両辺に作用素 $\int_{(0\sim x)} e^{(ax)}$ を作用させて(後ろに dx は付く)、求めていく。

まず①の左辺に $\int_{(0\sim x)} e^{(ax)}$ を作用させる。

$$\int_{(0\sim x)} e^{(ax)} \cdot (\pi-x)/2 \, dx = ((x-\pi)/(2a)) \cdot e^{(ax)} - \pi/(2a) + (e^{(ax)}-1)/(2a^2) \quad \text{----②}$$

次に①の右辺に着目する。まず $\sin(nx)/n$ に作用素を適用すると(部分積分を2回行つて)

$$\int_{(0\sim x)} e^{(ax)} \cdot (\sin(nx)/n) \, dx = a \cdot \sin(nx) \cdot e^{(ax)} / (n(n^2+a^2)) - \cos(nx) \cdot e^{(ax)} / (n^2+a^2) + 1/(n^2+a^2) \quad \text{----③}$$

となる。①の右辺の各項に項別積分を適用して次を得る。

$$\int_0^x e^{ax} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (\sin(nx)/n) dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \{ 1/(n^2+a^2) - \cos(nx) \cdot e^{ax}/(n^2+a^2) - a \cdot \sin(nx) \cdot e^{ax}/(n(n^2+a^2)) \} \quad \text{----④}$$

①の両辺に $\int_0^x e^{ax}$ を作用させた結果が②と④であるから②=④となつて、

$$((x-\pi)/(2a)) \cdot e^{ax} - \pi/(2a) + (e^{ax}-1)/(2a^2)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \{ 1/(n^2+a^2) - \cos(nx) \cdot e^{ax}/(n^2+a^2) - a \cdot \sin(nx) \cdot e^{ax}/(n(n^2+a^2)) \} \quad \text{----⑤}$$

ここで⑤の x に $2\pi/3$ を代入して整理すると次のようになる。

$$(a\sqrt{3}/2) \cdot A + B/2 = \pi/(6a) - (\pi/a) \cdot e^{-2a\pi/3} + 1/(2a^2) - (\pi/a) \cdot e^{-2a\pi/3}/(e^{2a\pi}-1) \quad \text{----⑥}$$

また、⑤の x に $4\pi/3$ を代入して整理すると次のようになる。

$$-(a\sqrt{3}/2) \cdot A + B/2 = -\pi/(6a) - (\pi/a) \cdot e^{-4a\pi/3} + 1/(2a^2) - (\pi/a) \cdot e^{-4a\pi/3}/(e^{2a\pi}-1) \quad \text{----⑦}$$

$$\text{ここで、} A = \{ 1/(1^2+a^2) - 1/(2^2+a^2) + 1/(4^2+a^2) - 5/(5^2+a^2) \}$$

$$+ \{ 1/(7^2+a^2) - 1/(8^2+a^2) + 1/(10^2+a^2) - 1/(11^2+a^2) \} + \dots$$

$$B = 1/(1^2+a^2) + 1/(2^2+a^2) - 2/(3^2+a^2) + 1/(4^2+a^2) + 1/(5^2+a^2) - 2/(6^2+a^2) + \dots$$

である。

なお、⑥、⑦を導く途中で、 2π 代入で得られる式

$$1/(1^2+a^2) + 1/(2^2+a^2) + 1/(3^2+a^2) + \dots = -1/(2a^2) + (\pi/(2a)) \cdot (e^{2a\pi}+1)/(e^{2a\pi}-1)$$

を利用した。

さて、⑥、⑦は A と B に関する連立方程式となっているから、これを解いて次を得る。

$$A = \pi/(3a^2\sqrt{3}) + (\pi/(a^2\sqrt{3})) \cdot (e^{2a\pi/3} - e^{4a\pi/3})/(e^{2a\pi}-1)$$

$$B = 1/a^2 - (\pi/a) \cdot (e^{4a\pi/3} + e^{2a\pi/3})/(e^{2a\pi}-1)$$

つまり、

$$\{ 1/(1^2+a^2) - 1/(2^2+a^2) + 1/(4^2+a^2) - 5/(5^2+a^2) \}$$

$$+ \{ 1/(7^2+a^2) - 1/(8^2+a^2) + 1/(10^2+a^2) - 1/(11^2+a^2) \} + \dots$$

$$= \pi/(3a^2\sqrt{3}) + (\pi/(a^2\sqrt{3})) \cdot (e^{2a\pi/3} - e^{4a\pi/3})/(e^{2a\pi}-1)$$

$$1/(1^2+a^2) + 1/(2^2+a^2) - 2/(3^2+a^2) + 1/(4^2+a^2) + 1/(5^2+a^2) - 2/(6^2+a^2) + \dots$$

$$= 1/a^2 - (\pi/a) \cdot (e^{4a\pi/3} + e^{2a\pi/3})/(e^{2a\pi}-1)$$

簡単な変形により、上記2式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \{1/(1^2+a^2) - 2/(2^2+a^2) + 4/(4^2+a^2) - 5/(5^2+a^2)\} \\ & + \{7/(7^2+a^2) - 8/(8^2+a^2) + 10/(10^2+a^2) - 11/(11^2+a^2)\} + \dots \\ & = (\pi/\sqrt{3}) \cdot (e^{(4a\pi/3)} - e^{(2a\pi/3)}) / (e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1/(3^2+a^2) + 1/(6^2+a^2) + 1/(9^2+a^2) + 1/(12^2+a^2) + \dots \\ & = -1/(2a^2) + \pi/(6a) + (\pi/(3a)) \cdot (1 + e^{(2a\pi/3)} + e^{(4a\pi/3)}) / (e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

変形の途中で、虚2次体 $Q(\sqrt{-3})$ ゼータ $LA(s) = (1 - 1/2^s + 1/4^s - 1/5^s) + (1/7^s - 1/8^s + 1/10^s - 1/11^s) + \dots$
の $s=1$ での値 $LA(1) = \pi/(3\sqrt{3})$ を用いた(類数公式)。

冒頭で示した目的の式が導出できた。

[終わり]

$$\begin{aligned} & \{1/(1^2+a^2) - 2/(2^2+a^2) + 4/(4^2+a^2) - 5/(5^2+a^2)\} \\ & + \{7/(7^2+a^2) - 8/(8^2+a^2) + 10/(10^2+a^2) - 11/(11^2+a^2)\} + \dots \\ & = (\pi/\sqrt{3}) \cdot (e^{(4a\pi/3)} - e^{(2a\pi/3)}) / (e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1/(3^2+a^2) + 1/(6^2+a^2) + 1/(9^2+a^2) + 1/(12^2+a^2) + \dots \\ & = -1/(2a^2) + \pi/(6a) + (\pi/(3a)) \cdot (1 + e^{(2a\pi/3)} + e^{(4a\pi/3)}) / (e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

これらの式を導いたわけであるが、まず下の方の式に注目しよう。

$$(1/3^s - 1/6^s + 1/9^s - 1/12^s + \dots) = 1/3^s (1/1^s - 1/2^s + 1/3^s - 1/4^s + \dots) = 1/3^s \cdot (1 - 1/2^{s-1}) \zeta(s)$$

であるから、下の式は $\zeta(s)$ の香りが漂っている。

次に上の方の式を見よう。ディリクレのL関数 $L(\chi, s)$ の一種である虚2次体 $Q(\sqrt{-3})$ ゼータは

$$LA(s) = (1 - 1/2^s + 1/4^s - 1/5^s) + (1/7^s - 1/8^s + 1/10^s - 1/11^s) + \dots$$

であるから、上の式は、 $LA(s)$ ゼータの香りが漂っていることもすぐにわかると思う。

前回までの結果も合わせてまとめておこう。

フーリエ級数

$$(\pi - x)/2 = \sin x/1 + \sin 2x/2 + \sin 3x/3 + \sin 4x/4 + \dots \quad (0 < x < 2\pi)$$

に $\int (0 \sim x) e^{ax}$ を作用させ x にある数を代入すると、以下の式が得られる。(a は任意の実数)

[2π 代入]

$$1/(1^2 + a^2) + 1/(2^2 + a^2) + 1/(3^2 + a^2) + 1/(4^2 + a^2) + \dots = -1/(2a^2) + (\pi/(2a)) \cdot (e^{(2a\pi)+1})/(e^{(2a\pi)} - 1)$$

[π 代入]

$$1/(1^2 + a^2) + 1/(3^2 + a^2) + 1/(5^2 + a^2) + 1/(7^2 + a^2) + \dots = (\pi/(4a)) \cdot (e^{(a\pi)-1})/(e^{(a\pi)} + 1)$$

$$1/(2^2 + a^2) + 1/(4^2 + a^2) + 1/(6^2 + a^2) + 1/(8^2 + a^2) + \dots = -1/(2a^2) + (\pi/(4a)) \cdot (e^{(a\pi)+1})/(e^{(a\pi)} - 1)$$

[(π/2)&(3π/2)代入]

$$\begin{aligned} 1/(2^2 + a^2) - 1/(4^2 + a^2) + 1/(6^2 + a^2) - 1/(8^2 + a^2) + \dots \\ = 1/(2a^2) - (\pi/(2a)) \cdot (e^{(3a\pi/2)+e^{(a\pi/2)}})/(e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

$$1/(1^2 + a^2) - 3/(3^2 + a^2) + 5/(5^2 + a^2) - 7/(7^2 + a^2) + \dots = (\pi/2) \cdot (e^{(3a\pi/2)} - e^{(a\pi/2)})/(e^{(2a\pi)} - 1)$$

[(π/3)代入&(5π/3)代入]

$$\begin{aligned} \{1/(1^2 + a^2) + 2/(2^2 + a^2) - 4/(4^2 + a^2) - 5/(5^2 + a^2)\} \\ + \{7/(7^2 + a^2) + 8/(8^2 + a^2) - 10/(10^2 + a^2) - 11/(11^2 + a^2)\} + \dots \\ = (\pi/\sqrt{3}) \cdot (e^{(5a\pi/3)} - e^{(a\pi/3)})/(e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1/(3^2 + a^2) - 1/(6^2 + a^2) + 1/(9^2 + a^2) - 1/(12^2 + a^2) + \dots \\ = 1/(2a^2) - (\pi/(3a)) \cdot (e^{(a\pi/3)} + e^{(a\pi)} + e^{(5a\pi/3)})/(e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

[(2π/3)代入&(4π/3)代入]

$$\begin{aligned} \{1/(1^2 + a^2) - 2/(2^2 + a^2) + 4/(4^2 + a^2) - 5/(5^2 + a^2)\} \\ + \{7/(7^2 + a^2) - 8/(8^2 + a^2) + 10/(10^2 + a^2) - 11/(11^2 + a^2)\} + \dots \\ = (\pi/\sqrt{3}) \cdot (e^{(4a\pi/3)} - e^{(2a\pi/3)})/(e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1/(3^2 + a^2) + 1/(6^2 + a^2) + 1/(9^2 + a^2) + 1/(12^2 + a^2) + \dots \\ = -1/(2a^2) + \pi/(6a) + (\pi/(3a)) \cdot (1 + e^{(2a\pi/3)} + e^{(4a\pi/3)})/(e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

今回、 $(2\pi/3)$ & $(4\pi/3)$ 代入で新しいゼータの香りの漂う式を導いた。次回は $(k\pi/4)$ 代入を調べることにする。
(杉岡幹生)