

ゼータの香りの漂う式（その4）

今回は、 $\pi/3$ と $5\pi/3$ を代入した場合を調べる。フーリエ級数

$$(\pi-x)/2 = \sin x/1 + \sin 2x/2 + \sin 3x/3 + \sin 4x/4 + \cdots \quad (0 < x < 2\pi)$$

の両辺に $\int_{(0 \sim x)} e^{(ax)}$ を作用させて得られる式の x に $\pi/3$ と $5\pi/3$ を代入すると、次の2式が導出される。

ここで a は任意の実数である。

$$\begin{aligned} & \{1/(1^2+a^2) + 2/(2^2+a^2) - 4/(4^2+a^2) - 5/(5^2+a^2)\} \\ & + \{7/(7^2+a^2) + 8/(8^2+a^2) - 10/(10^2+a^2) - 11/(11^2+a^2)\} + \cdots \\ & = (\pi/\sqrt{3}) \cdot (e^{(5a\pi/3)} - e^{(a\pi/3)}) / (e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1/(3^2+a^2) - 1/(6^2+a^2) + 1/(9^2+a^2) - 1/(12^2+a^2) + \cdots \\ & = 1/(2a^2) - (\pi/(3a)) \cdot (e^{(a\pi/3)} + e^{(a\pi)} + e^{(5a\pi/3)}) / (e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

試しに a に 2 を代入すると、上式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \{1/(1^2+4) + 2/(2^2+4) - 4/(4^2+4) - 5/(5^2+4)\} \\ & + \{7/(7^2+4) + 8/(8^2+4) - 10/(10^2+4) - 11/(11^2+4)\} + \cdots \\ & = (\pi/\sqrt{3}) \cdot (e^{(10\pi/3)} - e^{(2\pi/3)}) / (e^{(4\pi)} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1/(3^2+4) - 1/(6^2+4) + 1/(9^2+4) - 1/(12^2+4) + \cdots \\ & = 1/8 - (\pi/6) \cdot (e^{(2\pi/3)} + e^{(2\pi)} + e^{(10\pi/3)}) / (e^{(4\pi)} - 1) \end{aligned}$$

これらの導出過程を以下に示す。

【導出】

フーリエ級数

$$(\pi-x)/2 = \sin x/1 + \sin 2x/2 + \sin 3x/3 + \sin 4x/4 + \cdots \quad \text{----①}$$

$$(0 < x < 2\pi)$$

を出発点とする。①の左右両辺に作用素 $\int_{(0 \sim x)} e^{(ax)}$ を作用させて(後ろに dx は付く)、求めていく。

まず①の左辺に $\int_{(0 \sim x)} e^{(ax)}$ を作用させる。

$$\int_{(0 \sim x)} e^{(ax)} \cdot (\pi-x)/2 \, dx = ((x-\pi)/(2a)) \cdot e^{(ax)} - \pi/(2a) + (e^{(ax)}-1)/(2a^2) \quad \text{----②}$$

次に①の右辺に着目する。まず $\sin(nx)/n$ に作用素を適用すると(部分積分を2回行つて)

$$\int_{(0 \sim x)} e^{(ax)} \cdot (\sin(nx)/n) \, dx = a \cdot \sin(nx) \cdot e^{(ax)} / (n(n^2+a^2)) - \cos(nx) \cdot e^{(ax)} / (n^2+a^2) + 1/(n^2+a^2) \quad \text{----③}$$

となる。①の右辺の各項に項別積分を適用して次を得る。

$$\int_0^x e^{ax} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (\sin(nx)/n) dx \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \{1/(n^2+a^2) - \cos(nx) \cdot e^{ax}/(n^2+a^2) - a \cdot \sin(nx) \cdot e^{ax}/(n(n^2+a^2))\} \quad \text{----④}$$

①の両辺に $\int_0^x e^{ax}$ を作用させた結果が②と④であるから②=④となつて、

$$((x-\pi)/(2a)) \cdot e^{ax} - \pi/(2a) + (e^{ax}-1)/(2a^2) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \{1/(n^2+a^2) - \cos(nx) \cdot e^{ax}/(n^2+a^2) - a \cdot \sin(nx) \cdot e^{ax}/(n(n^2+a^2))\} \quad \text{----⑤}$$

ここで⑤の x に $\pi/3$ を代入して整理すると次のようになる。

$$-(\sqrt{3}/a) \cdot A + 3B = -(2\pi/a) \cdot e^{-a\pi/3} + 3/(2a^2) - (\pi/a) \cdot (e^{a\pi} + 2e^{-a\pi/3})/(e^{2a\pi}-1) \quad \text{----⑥}$$

また、⑤の x に $5\pi/3$ を代入して整理すると次のようになる。

$$(\sqrt{3}/a) \cdot A + 3B = -(2\pi/a) \cdot e^{-5a\pi/3} + 3/(2a^2) - (\pi/a) \cdot (e^{a\pi} + 2e^{-5a\pi/3})/(e^{2a\pi}-1) \quad \text{----⑦}$$

ここで、 $A = \{1/(1^2+a^2) + 2/(2^2+a^2) - 4/(4^2+a^2) - 5/(5^2+a^2)\}$

$$+ \{7/(7^2+a^2) + 8/(8^2+a^2) - 10/(10^2+a^2) - 11/(11^2+a^2)\} + \dots$$

$$B = 1/(3^2+a^2) - 1/(6^2+a^2) + 1/(9^2+a^2) - 1/(12^2+a^2) + \dots$$

である。

なお、⑥、⑦を導く整理の途中で、 2π 代入より得られる式

$$1/(1^2+a^2) + 1/(2^2+a^2) + 1/(3^2+a^2) + \dots = -1/(2a^2) + (\pi/(2a)) \cdot (e^{2a\pi}+1)/(e^{2a\pi}-1)$$

と、 π 代入の結果より得られる式

$$1/(1^2+a^2) - 1/(2^2+a^2) + 1/(3^2+a^2) - 1/(4^2+a^2) + \dots = 1/(2a^2) - (\pi/a) \cdot e^{a\pi}/(e^{2a\pi}-1)$$

と、ディリクレの類数公式より得られる次式

$$(1 + 1/2 - 1/4 - 1/5) + (1/7 + 1/8 - 1/10 - 1/11) + \dots$$

$$= \{(1 - 1/2 + 1/4 - 1/5) + (1/7 - 1/8 + 1/10 - 1/11) + \dots\} + \{2(1/2 - 1/4 + 1/8 - 1/10) + \dots\}$$

$$= LA(1) + \{(1/1 - 1/2 + 1/4 - 1/5) + \dots\} = 2LA(1) = 2\pi/(3\sqrt{3})$$

を利用した。最後は虚2次体 $Q(\sqrt{-3})$ ゼータ $LA(s) = (1 - 1/2^s + 1/4^s - 1/5^s) + (1/7^s - 1/8^s + 1/10^s - 1/11^s) + \dots$ に関する。

さて、⑥、⑦は A と B に関する連立方程式となっているから、これを解いて次を得る。

$$A = (\pi/\sqrt{3}) \cdot (e^{5a\pi/3} - e^{a\pi/3})/(e^{2a\pi}-1)$$

$$B = 1/(2a^2) - (\pi/3a) \cdot (e^{a\pi/3} + e^{a\pi} + e^{5a\pi/3})/(e^{2a\pi}-1)$$

つまり、

$$\begin{aligned} & \{1/(1^2+a^2) + 2/(2^2+a^2) - 4/(4^2+a^2) - 5/(5^2+a^2)\} \\ & + \{7/(7^2+a^2) + 8/(8^2+a^2) - 10/(10^2+a^2) - 11/(11^2+a^2)\} + \dots \\ & = (\pi/\sqrt{3}) \cdot (e^{(5a\pi/3)} - e^{(a\pi/3)}) / (e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1/(3^2+a^2) - 1/(6^2+a^2) + 1/(9^2+a^2) - 1/(12^2+a^2) + \dots \\ & = 1/(2a^2) - (\pi/(3a)) \cdot (e^{(a\pi/3)} + e^{(a\pi)} + e^{(5a\pi/3)}) / (e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

と目的の式が導出できた。

[終わり]

$$\begin{aligned} & \{1/(1^2+a^2) + 2/(2^2+a^2) - 4/(4^2+a^2) - 5/(5^2+a^2)\} \\ & + \{7/(7^2+a^2) + 8/(8^2+a^2) - 10/(10^2+a^2) - 11/(11^2+a^2)\} + \dots \\ & = (\pi/\sqrt{3}) \cdot (e^{(5a\pi/3)} - e^{(a\pi/3)}) / (e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1/(3^2+a^2) - 1/(6^2+a^2) + 1/(9^2+a^2) - 1/(12^2+a^2) + \dots \\ & = 1/(2a^2) - (\pi/(3a)) \cdot (e^{(a\pi/3)} + e^{(a\pi)} + e^{(5a\pi/3)}) / (e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

これらの式を導いたわけであるが、まず下式に注目しよう。

$$(1/3^s - 1/6^s + 1/9^s - 1/12^s + \dots) = 1/3^s (1/1^s - 1/2^s + 1/3^s - 1/4^s + \dots) = 1/3^s \cdot (1 - 1/2^{s-1}) \zeta(s)$$

であるから、下式は $\zeta(s)$ の香りが漂っている。

次に上式を見よう。上式の方は、じつはディリクレのL関数 $L(\chi, s)$ の一種である虚2次体 $Q(\sqrt{-3})$ ゼータ

$$LA(s) = (1 - 1/2^s + 1/4^s - 1/5^s) + (1/7^s - 1/8^s + 1/10^s - 1/11^s) + \dots$$

の香りが漂っているのだが、すぐにはわかりにくいと思う。“+”の符号の付き方が違っているため、一見わかりにくいことになっている。しかし、

$$\begin{aligned} & (1/1^s + 1/2^s - 1/4^s - 1/5^s) + (1/7^s + 1/8^s - 1/10^s - 1/11^s) + \dots \\ & = \{(1/1^s - 1/2^s + 1/4^s - 1/5^s) + (1/7^s - 1/8^s + 1/10^s - 1/11^s) + \dots\} \\ & \quad + \{2(1/2^s - 1/4^s + 1/8^s - 1/10^s) + \dots\} \\ & = LA(s) + \{(1/1^s - 1/2^s + 1/4^s - 1/5^s) + \dots\} = 2LA(s) \end{aligned}$$

という変形が可能であることを考えると、上式は確実に $LA(s)$ ゼータの香りが漂っているといえるのである！

ただし、ゼータと違って分母に a^2 があるためにこの変形をしようにもできないだけである。

前回までの結果も合わせてまとめておこう。

フーリエ級数

$$(\pi - x)/2 = \sin x/1 + \sin 2x/2 + \sin 3x/3 + \sin 4x/4 + \dots \quad (0 < x < 2\pi)$$

に $\int (0 \sim x) e^{ax}$ を作用させ x にある数を代入すると、以下の式が得られる。(a は任意の実数)

[2 π 代入]

$$1/(1^2 + a^2) + 1/(2^2 + a^2) + 1/(3^2 + a^2) + 1/(4^2 + a^2) + \dots = -1/(2a^2) + (\pi/(2a)) \cdot (e^{2a\pi} + 1)/(e^{2a\pi} - 1)$$

[π 代入]

$$1/(1^2 + a^2) + 1/(3^2 + a^2) + 1/(5^2 + a^2) + 1/(7^2 + a^2) + \dots = (\pi/(4a)) \cdot (e^{a\pi} - 1)/(e^{a\pi} + 1)$$

$$1/(2^2 + a^2) + 1/(4^2 + a^2) + 1/(6^2 + a^2) + 1/(8^2 + a^2) + \dots = -1/(2a^2) + (\pi/(4a)) \cdot (e^{a\pi} + 1)/(e^{a\pi} - 1)$$

[($\pi/2$) & (3 $\pi/2$) 代入]

$$\begin{aligned} 1/(2^2 + a^2) - 1/(4^2 + a^2) + 1/(6^2 + a^2) - 1/(8^2 + a^2) + \dots \\ = 1/(2a^2) - (\pi/(2a)) \cdot (e^{3a\pi/2} + e^{a\pi/2})/(e^{2a\pi} - 1) \end{aligned}$$

$$1/(1^2 + a^2) - 3/(3^2 + a^2) + 5/(5^2 + a^2) - 7/(7^2 + a^2) + \dots = (\pi/2) \cdot (e^{3a\pi/2} - e^{a\pi/2})/(e^{2a\pi} - 1)$$

[($\pi/3$) 代入 & (5 $\pi/3$) 代入]

$$\begin{aligned} \{1/(1^2 + a^2) + 2/(2^2 + a^2) - 4/(4^2 + a^2) - 5/(5^2 + a^2)\} \\ + \{7/(7^2 + a^2) + 8/(8^2 + a^2) - 10/(10^2 + a^2) - 11/(11^2 + a^2)\} + \dots \\ = (\pi/\sqrt{3}) \cdot (e^{5a\pi/3} - e^{a\pi/3})/(e^{2a\pi} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1/(3^2 + a^2) - 1/(6^2 + a^2) + 1/(9^2 + a^2) - 1/(12^2 + a^2) + \dots \\ = 1/(2a^2) - (\pi/(3a)) \cdot (e^{a\pi/3} + e^{a\pi} + e^{5a\pi/3})/(e^{2a\pi} - 1) \end{aligned}$$

今回、 $(\pi/3)$ & $(5\pi/3)$ 代入で新しいゼータの香りの漂う式を導いた。次回は $(2\pi/3)$ & $(4\pi/3)$ 代入を調べることにする。(杉岡幹生)