

## 有限図形の代数的表現について

三角形や星型を式で表現したいという思いから以下のことを、考察をしました。有限個の点と辺で、構成される図形を、関数で表現する。そのため、基礎体として、素数の有限体を考える。但し、扱うのは、点の数と辺の数が等しい、特別場合である。先ず、 $P=5$  のときから、始めることにします。

### 1. グラフと写像と関数について（特別な場合）

集合  $F = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  について、写像  $f : F \rightarrow F$  を考える。

このような写像は、 $5^5 = 3125$  個あります。

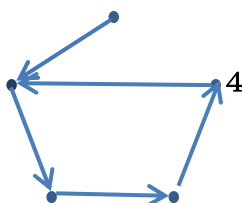
$f(0)=a, f(1)=b, f(2)=c, f(3)=d, f(4)=e$  となる写像を

$$f \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix} \equiv (a, b, c, d, e)_m \quad \text{または、} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}_m \quad \text{列ベクトル表示をする。}$$

「次に、円周上に、5個の点を等間隔にとり、上から（12時）左回りに、0, 1, 2, 3, 4と点に名前をつけます。」

注意この「」は、便宜上のことであり、これからの議論に、適用されない。

例えば、 $f \equiv (1, 2, 3, 4, 1)_m$  の表すグラフとは、有効グラフで



を表すことができます。

更に、ここで有限体  $F_5$  上の関数を考えます。たとえば、

$$f(x) = 4x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 1 \quad x \neq 0 \Rightarrow x^4 = 1$$

$f(x)$  は上のグラフを表す関数であることがわかります。

$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$  のとき、

その係数をとって  $(A, B, C, D, E)_p$  と表す。

「 $F$  上の写像を、全て、 $F_5[x]$  の 4 次以下の関数で表すことができる。

写像と関数が 1 対 1 に対応する。」

証明

$4x^4 + 1$  は写像  $(1, 0, 0, 0, 0)_m$  を表すので、

写像  $(a, b, c, d, e)_m$  を表す関数は、

$$\begin{aligned} & a(4x^4 + 1) + b\{4(x-1)^4 + 1\} + c\{4(x-2)^4 + 1\} + d\{4(x-3)^4 + 1\} + e\{4(x-4)^4 + 1\} \\ &= (4a + 4b + 4c + 4d + 4e)x^4 + (4b + 3c + 2d + e)x^3 + (4b + c + d + 4e)x^2 + (4b + 2c + 3d + e)x + a \end{aligned}$$

つまり、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}_m = \begin{pmatrix} a \\ 4b + 2c + 3d + e \\ 4b + c + d + 4e \\ 4b + 3c + 2d + e \\ 4a + 4b + 4c + 4d + 4e \end{pmatrix}_p$$

また逆に、4 次以下の関数は、 $F$  上の写像を表す。

整式  $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$  の表す写像は、 $x = 0, 1, 2, 3, 4$  を代入して、

$$\begin{pmatrix} A \\ A + B + C + D + E \\ A + 2B + 4C + 3D + E \\ A + 3B + 4C + 2D + E \\ A + 4B + C + 4D + E \end{pmatrix}_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix}_p$$

と表せる。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{とおくと}$$

$AB = I, |A| = 2, |B| = 3$  が成り立つ。(A、B をそれぞれ変換行列とよぶ)

「また、A の各行は、関数  $4x^4 + 1, 4x^3, 4x^2, 4x, 4$  の値になっている。

B の各列は、関数  $1, x, x^2, x^3, x^4$  の値になっている。」

一般の P (素数) のとき、写像から、関数への変換行列を A、  
関数から写像への変換行列を B とするとき、上のことが成り立つ。

つまり、

$$A = \begin{pmatrix} (p-1)x^{p-1}+1 \text{の値を} 1 \text{ 行目とする} \\ (p-1)x^{p-1-i} \text{の値を} i \text{ 行目とする} \\ (p-1) \text{の値を} p-1 \text{ 行目とする} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 \\ \vdots & (p-1) & (p-1)k^{p-1-i} & & (p-1)^{p-i} \\ 0 \\ p-1 & & \cdots & & p-1 \end{pmatrix}$$

証明

写像  $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})_m$  をもつ関数は、

$a_0(4x^4 + 1) + \cdots + a_k \{4(x-k)^4 + 1\} + \cdots + a_{p-1} \{4(x-p+1)^4 + 1\}$  であり、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 \\ \vdots & (p-1) & (p-1)k^{p-1-i} & & (p-1)^{p-i} \\ 0 \\ p-1 & & \cdots & & p-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{pmatrix}_m \quad \text{と比較すると}$$

定数項は、 $a_0$   $x^{p-1}$  の係数は、 $a_0(p-1) + \cdots + a_{p-1}(p-1)$  で一致する。

関数の  $x^i (i=1 \square p-2)$  の係数は、 $\sum_{k=1}^{p-1} a_k (p-1) {}_{p-1}C_i (-k)^{p-1-i}$

一方行列計算による  $x^i (i=1 \square p-2)$  の係数は、 $\sum_{k=1}^{p-1} a_k (p-1) k^{p-1-i}$

よって、 ${}_{p-1}C_i (-1)^{p-1-i} = 1$  が成り立てばよい。

一般に、 ${}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r+1} = {}_n C_{r+1}$  が成り立つので、 $n=p$  素数のとき、

${}_{p-1}C_r + {}_{p-1}C_{r+1} = {}_p C_{r+1} \equiv 0$  また、 ${}_{p-1}C_0 = 1$  より、

${}_{p-1}C_i = (-1)^i$  なので、 ${}_{p-1}C_i (-1)^{p-1-i} = 1$  が成り立つ。

よって、全ての係数で一致していることが、示された。

また、 $B$  については、

整式  $A_0 + \dots + A_i x^i + \dots + A_{p-1} x^{p-1}$  の表す写像は、

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_0 + \dots + A_i k^i + \dots + A_{p-1} k^{p-1} \\ \vdots \\ A_0 + \dots + A_i (p-1)^i + \dots + A_{p-1} (p-1)^{p-1} \end{pmatrix}$$

となるので、

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \dots & k^i & \dots & k^{p-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \dots & (p-1)^i & \dots & (p-1)^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_{p-1} \end{pmatrix}_p$$

証明終わり

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & (p-1) & (p-1)k^{p-1-i} & & (p-1)^{p-i} \\ 0 & & & & \\ p-1 & & \cdots & & p-1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \cdots & k^i & \cdots & k^{p-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \cdots & (p-1)^i & \cdots & (p-1)^{p-1} \end{pmatrix} \quad AB = I$$

また、

$AB$  の 1 列目の、1 行目以外は、0 になるので、

$$\sum_{x=1}^{p-1} (p-1)x^k = 0 \quad (k=1 \square p-2) \quad \text{つまり}$$

$$1 + 2^k + 3^k + \cdots + (p-1)^k \equiv 0 \pmod{p} \quad (k=1 \square p-2) \quad \text{が成り立つ。}$$

これは、 $k$  が奇数のときは、自明である。

具体的には、 $x^k = (p-x)^k$  が成り立つので、 $k$  が偶数のとき

$$1^k + \cdots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^k \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{但し } k < p-1 \quad \text{が成り立つ。}$$

$$1 + 2^2 \equiv 0 \pmod{5}, 1 + 2^2 + 3^2 \equiv 0 \pmod{7}, 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 \equiv 0 \pmod{11}$$

$$1 + 2^4 + 3^4 \equiv 0 \pmod{7}, 1 + 2^6 + 3^6 + 4^6 + 5^6 \equiv 0 \pmod{11}$$

一般の整数において、 $f(n) = \sum_{k=1}^n k^i$  (累乗和) は、 $n$  の多項式で表される。

この分数係数の分母の最小公倍数を、 $a$  とすると、

$g(n) = af(n)$  は、整数係数の  $n$  の関数となる。

$g(n)$  を  $2n+1$  で割った商を  $h(n)$ , 余りを  $r$  とする。 $n = \frac{p-1}{2}$  を代入すると、

$$g\left(\frac{p-1}{2}\right) = af\left(\frac{p-1}{2}\right) = a\{1 + 2^{2i} + \cdots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^{2i}\} \equiv 0 \pmod{p} \text{ となり、一方}$$

$$g\left(\frac{p-1}{2}\right) = \left(2\frac{p-1}{2} + 1\right)h\left(\frac{p-1}{2}\right) + r \equiv 0 \pmod{p}, \text{つまり } r \equiv 0 \pmod{p}$$

ここで  $p$  は、任意で成り立つので、 $r = 0$

$i$  が、偶数のとき  $f(n)$  は  $2n+1$  を因数にもつことがわかる。

実際

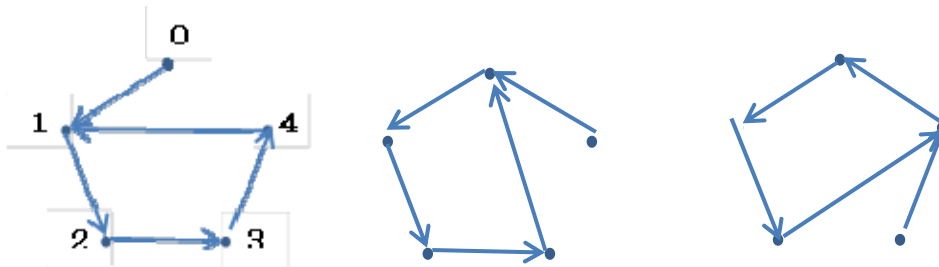
$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^6 = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$$

## 2. 回転合同について

回転によって、重なるグラフを、回転合同（単に合同）と呼ぶことにする。  
つまり、



これらは、右または左に回転させれば、重なるので、回転合同である。  
元の写像に対して、右に1つ回転する写像を考えると、  
番号の付け替えによる違いなので

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ a-1 & b-1 & c-1 & d-1 & e-1 \end{pmatrix} \text{つまり}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ b-1 & c-1 & d-1 & e-1 & a-1 \end{pmatrix} \text{となる。}$$

まずこの回転に対して、**不変なもの**を考えると、元の写像と一致するので、

$$a = b - 1 \quad a = 0 \text{のとき、} b = 1, c = 2, d = 3, e = 4$$

$$b = c - 1 \quad a = 1 \text{のとき、} b = 2, c = 3, d = 4, e = 0$$

$$c = d - 1 \quad \text{となり、} a = 2 \text{のとき、} b = 3, c = 4, d = 0, e = 1 \text{の} 5 \text{つが存在する。}$$

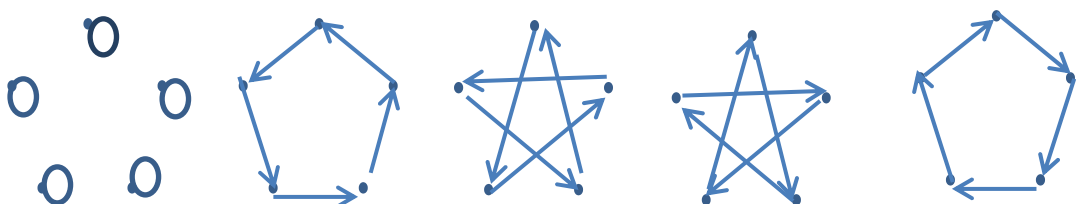
$$d = e - 1 \quad a = 3 \text{のとき、} b = 4, c = 0, d = 1, e = 2$$

$$e = a - 1 \quad a = 4 \text{のとき、} b = 0, c = 1, d = 2, e = 3$$

それぞれの写像に、対応する関数は、上から順に、

$x, x+1, x+2, x+3, x+4$  の5つの1次関数である。

それぞれのグラフは、左から



回転合同の5つの写像を、行列の形でまとめると

$$\begin{pmatrix} a & b-1 & c-2 & d-3 & e-4 \\ b & c-1 & d-2 & e-3 & a-4 \\ c & d-1 & e-2 & a-3 & b-4 \\ d & e-1 & a-2 & b-3 & c-4 \\ e & a-1 & b-2 & c-3 & d-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+4 & c+3 & d+2 & e+1 \\ b & c+4 & d+3 & e+2 & a+1 \\ c & d+4 & e+3 & a+2 & b+1 \\ d & e+4 & a+3 & b+2 & c+1 \\ e & a+4 & b+3 & c+2 & d+1 \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

関数  $F(x, \alpha) = A(x+\alpha)^4 + B(x+\alpha)^3 + C(x+\alpha)^2 + D(x+\alpha) + E + 4\alpha$  の  
 $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$  の関数に対応する写像は、右回転の関数がそれぞれ対応する。

$$\begin{pmatrix} f(0,0) & f(0,1) & f(0,2) & f(0,3) & f(0,4) \\ f(1,0) & f(1,1) & f(1,2) & f(1,3) & f(1,4) \\ f(2,0) & f(2,1) & f(2,2) & f(2,3) & f(2,4) \\ f(3,0) & f(3,1) & f(3,2) & f(3,3) & f(3,4) \\ f(4,0) & f(4,1) & f(4,2) & f(4,3) & f(4,4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & A+B+C+D+E+4 & A+3B+4C+2D+E+3 & A+2B+4C+3D+E+2 & A+4B+C+4D+E+1 \\ A+B+C+D+E & A+3B+4C+2D+E+4 & A+2B+4C+3D+E+3 & A+4B+C+4D+E+2 & E+1 \\ A+3B+4C+2D+E & A+2B+4C+3D+E+4 & A+4B+C+4D+E+3 & E+2 & A+B+C+D+E+1 \\ A+2B+4C+3D+E & A+4B+C+4D+E+4 & E+3 & A+B+C+D+E+2 & A+3B+4C+2D+E+1 \\ A+4B+C+4D+E & E+4 & A+B+C+D+E+3 & A+3B+4C+2D+E+2 & A+2B+4C+3D+E+1 \end{pmatrix}$$

標準形（次数—1 次の項がない形）

4次関数のとき、 $A(x+\alpha)^4 + B(x+\alpha)^2 + C(x+\alpha) + D + 4\alpha$

3次関数のとき、 $A(x+\alpha)^3 + B(x+\alpha) + C + 4\alpha$

2次関数のとき、 $A(x+\alpha)^2 + B + 4\alpha$

1次関数のとき、 $A(x+\alpha) + 4\alpha$

4次式について、考えると

どの任意の4次式  $A_1x^4 + B_1x^3 + C_1x^2 + D_1x + E_1$  対しても、

ただ一つの標準形（3次の項が抜けた）が対応する。

$$\begin{aligned}
& A(x+\alpha)^4 + C(x+\alpha)^2 + D(x+\alpha) + E + 4\alpha \\
&= Ax^4 + 4A\alpha x^3 + A\alpha^2 x^2 + 4A\alpha^3 x + A\alpha^4 \\
&\quad + Cx^2 + 2C\alpha x + C\alpha^2 \\
&\quad + Dx + D\alpha + E + 4\alpha
\end{aligned}$$

なので、係数を比較して

$$A = A_1, \alpha = \frac{B_1}{4A}, C = C_1 - A\alpha^2, D = D_1 - 4A\alpha^3, E = E_1 - A\alpha^4 - C\alpha^2 - D\alpha - 4\alpha$$

とすればよい。

「以上によって、回転合同の5つの関数は、同じ次数であり、最高次の係数が同じであり、標準形によって、一つにまとめることができる。」

3次式、2次式、1次式についてもそれぞれ標準形にまとめることができる。

「回転合同の2つの関数を、 $f_1, f_2$ としたとき、適当な行列 $C$ が存在して、 $Cf_1 = f_2$

を満たし、更に、他の5つの回転合同の関数に対しても満たしている。」

具体的な例として、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

この行列は、一つの関数を、右へ1個回転した関数に移す。

関数が4次式のとき、回転合同な関数は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b+4 & c+3 & d+2 & e+1 \\ b & c+4 & d+3 & e+2 & a+1 \\ c & d+4 & e+3 & a+2 & b+1 \\ d & e+4 & a+3 & b+2 & c+1 \\ e & a+4 & b+3 & c+2 & d+1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a & b+4 & c+3 & d+2 & e+1 \\ 4b+2c+3d+e & 4c+2d+3e+a & 4d+2e+3a+b & 4e+2a+3b+c & 4a+2b+3c+d \\ 4b+c+d+4e & 4c+d+e+4a & 4d+e+a+4b & 4e+a+b+4c & 4a+b+c+4d \\ 4b+3c+2d+e & 4c+3d+2e+a & 4d+3e+2a+b & 4e+3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ 4a+4b+4c+4d+4e & 4b+4c+4d+4e+4a & 4c+4d+4e+4a+4b & 4d+4e+4a+4b+4c & 4e+4a+4b+4c+4d \end{pmatrix}$$

となり、これに回転する行列 $C$ をかければよい。

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{但し、} a+b+c+d+e \neq 0 \text{なので、} x=1+(a+b+c+d+e)^{-1}$$

関数が3次式のとき、これにかける右へ一つの回転行列は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{但し、} a+b+c+d+e=0 \text{なので、} x=1+(4b+3c+2d+e)^{-1}$$

関数が、2次式のとき、これにかける右へ一つの回転行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

但し、 $a+b+c+d+e=0$ かつ $4b+3c+2d+e=0$ なので

$x=1+(4b+c+d+4e)^{-1}$ とおけばよい。

関数が、1次式のとき、

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

但し、 $a+b+c+d+e=0$ かつ $4b+3c+2d+e=0$ かつ $4b+c+d+4e=0$ なので

$x=1+(4b+2c+3d+e)^{-1}$ とおけばよい。

関数が、定数のときは、明らかに

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

どの  $x$  の値も、1 以外の数をとる。

一般の素数  $P$  の場合の右 1 個の回転行列は、次数によって少し異なるが、 $p-1$  次であれば、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & & {}_{p-2}C_{p-3} & {}_{p-1}C_{p-2} \\ & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & {}_{p-1}C_k \\ & & & & {}_{p-2}C_1 & \vdots \\ & & & & 1 & {}_{p-1}C_1 \\ 0 & & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

関数  $A_{p-1}x^{p-1} + A_{p-2}x^{p-2} + \cdots + A_0$  の、一つ右回転した関数は、

$$A_{p-1}(x+1)^{p-1} + A_{p-2}(x+1)^{p-2} + \cdots + A_0 + 4 =$$

$$A_{p-1}x^{p-1} + (A_{p-1} {}_{p-1}C_{p-2} + A_{p-2})x^{p-2} + \cdots + (A_{p-1} + A_{p-2} + \cdots + A_0 + 4) \quad \text{なので}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & & {}_{p-2}C_{p-3} & {}_{p-1}C_{p-2} \\ & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & {}_{p-1}C_k \\ & & & & {}_{p-2}C_1 & \vdots \\ & & & & 1 & {}_{p-1}C_1 \\ 0 & & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_{p-2} \\ A_{p-1} \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} A_0 + \cdots + A_{p-2} + xA_{p-1} \\ \vdots \\ A_{p-2} + A_{p-1} {}_{p-1}C_{p-2} \\ A_{p-1} \end{pmatrix}_p$$

2 行目以降は、成り立っている。一行目は、

$$A_{p-1} \neq 0 \quad \text{ならば、} x = 1 + \frac{4}{A_{p-1}} \quad \text{とすればよい。}$$

以上によって、「回転行列は、一般に、定数以外は、 $|P| = 1$  を満たす三角行列である。」

「回転合同な、5 つの写像で作る行列の 2 乗は、対称行列になる。」

$$\begin{pmatrix} a & b+4 & c+3 & d+2 & e+1 \\ b & c+4 & d+3 & e+2 & a+1 \\ c & d+4 & e+3 & a+2 & b+1 \\ d & e+4 & a+3 & b+2 & c+1 \\ e & a+4 & b+3 & c+2 & d+1 \end{pmatrix}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \\ c & d & e & a & b \\ d & e & a & b & c \\ e & a & b & c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}^2$$

これを展開して、

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \\ c & d & e & a & b \\ d & e & a & b & c \\ e & a & b & c & d \end{pmatrix}^2 \quad \text{は対称行列の積は、対称行列なので、これは、対称行列となる。}$$

具体的に計算すると

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 & ab+bc+cd+de+ea & ac+bd+ce+da+eb & ad+be+ca+bd+ec & ae+ba+cb+dc+ed \\ ab+bc+cd+de+ea & a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 & ab+bc+cd+de+ea & ac+bd+ce+da+eb & ac+bd+ce+da+eb \\ ac+bd+ce+da+eb & ab+bc+cd+de+ea & a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 & ab+bc+cd+de+ea & ac+bd+ce+da+eb \\ ac+bd+ce+da+eb & ac+bd+ce+da+eb & ab+bc+cd+de+ea & a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 & ab+bc+cd+de+ea \\ ae+ba+cb+dc+ed & ac+bd+ce+da+eb & ac+bd+ce+da+eb & ab+bc+cd+de+ea & a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 &= A \\ ab+bc+cd+de+ea &= B \\ ac+bd+ce+da+eb &= C \end{aligned} \quad \text{とおけば、} \quad \begin{pmatrix} A & B & C & C & B \\ B & A & B & C & C \\ C & B & A & B & C \\ C & C & B & A & B \\ B & C & C & B & A \end{pmatrix} \quad \text{の形となる。}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \\ c & d & e & a & b \\ d & e & a & b & c \\ e & a & b & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4\Sigma & 3\Sigma & 2\Sigma & \Sigma \\ 0 & 4\Sigma & 3\Sigma & 2\Sigma & \Sigma \\ 0 & 4\Sigma & 3\Sigma & 2\Sigma & \Sigma \\ 0 & 4\Sigma & 3\Sigma & 2\Sigma & \Sigma \\ 0 & 4\Sigma & 3\Sigma & 2\Sigma & \Sigma \end{pmatrix}, \Sigma = a+b+c+d+e$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \\ c & d & e & a & b \\ d & e & a & b & c \\ e & a & b & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma + \Sigma_1 & 2\Sigma + \Sigma_1 & 3\Sigma + \Sigma_1 & 4\Sigma + \Sigma_1 \\ \Sigma_1 & \Sigma + \Sigma_1 & 2\Sigma + \Sigma_1 & 3\Sigma + \Sigma_1 & 4\Sigma + \Sigma_1 \\ \Sigma_1 & \Sigma + \Sigma_1 & 2\Sigma + \Sigma_1 & 3\Sigma + \Sigma_1 & 4\Sigma + \Sigma_1 \\ \Sigma_1 & \Sigma + \Sigma_1 & 2\Sigma + \Sigma_1 & 3\Sigma + \Sigma_1 & 4\Sigma + \Sigma_1 \\ \Sigma_1 & \Sigma + \Sigma_1 & 2\Sigma + \Sigma_1 & 3\Sigma + \Sigma_1 & 4\Sigma + \Sigma_1 \end{pmatrix}$$

但し、 $\Sigma_1 = 4a + 3b + 2c + d$  となり、2つの行列をたすと

$$\begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 \\ \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 \\ \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 \\ \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 \\ \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 \end{pmatrix} \quad \text{となり}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b+4 & c+3 & d+2 & e+1 \\ b & c+4 & d+3 & e+2 & a+1 \\ c & d+4 & e+3 & a+2 & b+1 \\ d & e+4 & a+3 & b+2 & c+1 \\ e & a+4 & b+3 & c+2 & d+1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} A & B & C & C & B \\ B & A & B & C & C \\ C & B & A & B & C \\ C & C & B & A & B \\ B & C & C & B & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 \\ \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 \\ \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 \\ \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 \\ \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 \end{pmatrix}$$

の形となる。対称行列の和はやはり、対称行列なので、以上により、先の「 $\Sigma_1$ 」が示された。

特に、定数写像のとき、

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 次の写像のとき、回転合同の行列を  $X$ 、対応する関数の行列を  $Y$  とすると

$$X = \begin{pmatrix} a & b+4 & c+3 & d+2 & e+1 \\ b & c+4 & d+3 & e+2 & a+1 \\ c & d+4 & e+3 & a+2 & b+1 \\ d & e+4 & a+3 & b+2 & c+1 \\ e & a+4 & b+3 & c+2 & d+1 \end{pmatrix}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & b+4 & c+3 & d+2 & e+1 \\ b & c+4 & d+3 & e+2 & a+1 \\ c & d+4 & e+3 & a+2 & b+1 \\ d & e+4 & a+3 & b+2 & c+1 \\ e & a+4 & b+3 & c+2 & d+1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} A & B & C & C & B \\ B & A & B & C & C \\ C & B & A & B & C \\ C & C & B & A & B \\ B & C & C & B & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 \\ \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 \\ \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 \\ \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 \\ \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 & \Sigma_1 \end{pmatrix}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = A$$

$$ab + bc + cd + de + ea = B \quad \Sigma_1 = 4a + 3b + 2c + d$$

$$ac + bd + ce + da + eb = C$$

$$Y = \begin{pmatrix} a & b+4 & c+3 & d+2 & e+1 \\ 4b+2c+3d+e & 4c+2d+3e+a & 4d+2e+3a+b & 4e+2a+3b+c & 4a+2b+3c+d \\ 4b+c+d+4e & 4c+d+e+4a & 4d+e+a+4b & 4e+a+b+4c & 4a+b+c+4d \\ 4b+3c+2d+e & 4c+3d+2e+a & 4d+3e+2a+b & 4e+3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ 4a+4b+4c+4d+4e & 4b+4c+4d+4e+4a & 4c+4d+4e+4a+4b & 4d+4e+4a+4b+4c & 4e+4a+4b+4c+4d \end{pmatrix}$$

1 次式なので、2 次、3 次、4 次の係数は 0 で、1 次の係数は合同なので、すべて等しい。

1 次式は、全単射なので、

$$a + b + c + d + e = 0, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 0$$

$$(a + b + c + d + e)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$$

$$+ 2(ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de)$$

$$ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de = 0$$

$$a + b + c + d + e = 0$$

$$4b + 3c + 2d + e = 0, \dots, 4a + 3b + 2c + d = 0$$

$$\begin{aligned} 4b + 2c + 3d + e &= 4c + 2d + 3e + a = 4d + 2e + 3a + b \\ &= 4e + 2a + 3b + c = 4a + 2b + 3c + d \end{aligned}$$

これを解くと

$$a = 2b + 4c, d = b + 2c, e = 3b + 3c$$

$$ab + bc + cd + de + ea$$

$$= (2b + 4c)b + bc + c(4b + 2c) + (4b + 2c)(3b + 3c) + (3b + 3c)(2b + 4c)$$

$$= 2b^2 + 4bc + bc + 4bc + 2c^2 + 2b^2 + 3bc + c^2 + b^2 + 3bc + 2c^2 = 0$$

先の  $ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de = 0$  より

$$ab + bc + ce + da + eb = 0 \quad \text{なので、} \quad ac + bd; ce + da + ea = 0$$

$$\text{つまり、} A = 0, B = 0, C = 0, \Sigma_1 = 0$$

1 次の写像のとき、 $X^2 = 0$

二次の回転合同の写像を、 $X$  とすると

$$a + b + c + d + e = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$4b + 3c + 2d + e = 0 \dots \textcircled{2} \quad \text{上と同様にして、} \Sigma_1 = 0$$

$$\textcircled{1}、\textcircled{2} \text{を解くと、} a = 3b + 2c + d, e = b + 2c + 3d$$

$$ab + bd + ce + da + eb$$

$$= (3b + 2c + d)b + bd + c(b + 2c + 3d) + d(3b + 2c + d) + (b + 2c + 3d)(3b + 2c + d)$$

$$= b^2 + 4c^2 + d^2 + bc + 2bd + cd$$

$$\text{同様に、} ac + bd + ce + da + eb = b^2 + 4c^2 + d^2 + bc + 2cd + cd$$

$$\text{つまり、} ab + bc + cd + de + ea = ac + bd + ce + da + eb$$

$$(a + b + c + d + e)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$$

$$+ 2(ab + bc + cd + de + ea + ac + bd + ce + da + eb)$$

$$a+b+c+d+e=0, ab+bc+cd+de+ea=ac+bd+ce+da+eb \text{ より}$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=ab+bc+cd+de+ea \text{ が成り立つ。}$$

以上により、 $X$  の 2 乗は、成分がすべて同じ定数行列になる。具体的には、

$$\text{二次式を } \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad \alpha \neq 0 \text{ とすると、}$$

$$x=0,1,2,3,4 \text{ を代入して、 } a=\gamma, b=\alpha+\beta+\gamma, c=4\alpha+2\beta+\gamma$$

$$d=4\alpha+3\beta+\gamma, e=\alpha+4\beta+\gamma$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$$

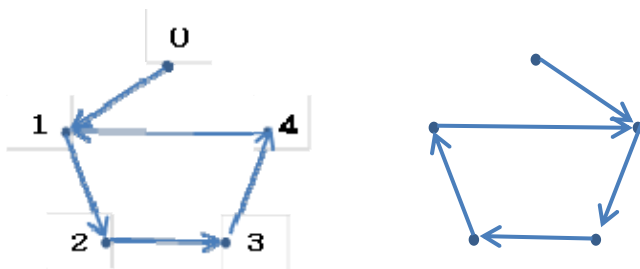
$$= \alpha^2 + (\alpha + \beta + \gamma)^2 + (4\alpha + 2\beta + \gamma)^2 + (4\alpha + 3\beta + \gamma)^2 + (\alpha + 4\beta + \gamma)^2$$

$$= 4\alpha^2 = 1, \quad 4$$

$$\text{2 次の関数のとき、 } X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ となる}$$

### 3. 反転合同について

反転によって、重なるグラフを反転合同とよぶことにする。つまり



0 軸対称、1 を 4、2 を 3、3 を 2、4 を 1、0 はそのままに、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}_m \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_m$$

式で表すと、

$$(1 \ 2 \ 4 \ 1 \ 4)_p \rightarrow (4 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1)_p \quad \text{この変換を行列で表すと、}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A(x+\alpha)^4 + C(x+\alpha)^2 + D(x+\alpha) + E + 4\alpha$  に対して、その反転は、

$\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$  に対する関数を、 $Ax^4 + B_ix^3 + C_ix^2 + D_ix + E_i \ (i = 0 \square 4)$  として

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \\ D_0 & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \\ C_0 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A & A & A & A & A \end{pmatrix} \quad \text{によって反転すると}$$

やはり、その5つの式も、回転合同で、標準形で

$$A'(x+\alpha)^4 + C'(x+\alpha)^2 + D'(x+\alpha) + E' + 4\alpha =$$

$$4A(x+\alpha)^4 + 4C(x+\alpha)^2 + D(x+\alpha) + 4E + 4\alpha \quad \text{と表される。}$$

$$A' = A, C' = 4C, D' = D, E' = 4E$$

それぞれの対応は、 $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$  の右回転に対して、

$\alpha = 0, 4, 3, 2, 1$  の左回転が対応する。標準形は、標準形に対応する。

他の軸に、対する反転も、右回転して後反転し更にもとに左回転して戻せば、この5つのどれかに対応している事がわかる。

1, 2, 3, 4の軸に反転するときは、標準形は、標準形に対応しない。

反転に対して、不変なものは、

0 軸対称、1 を 4、2 を 3、3 を 2、4 を 1、0 はそのままに、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}_m \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4a & 4b & 4c & 4d & 4e \end{pmatrix}_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4a & 4e & 4d & 4c & 4b \end{pmatrix}_m$$

$$a = 4a, b = 4e, c = 4d, d = 4c, e = 4b \quad \text{を解くと}$$

$$a = 0, b + e = 0, c + d = 0 \quad \text{なので}$$

$b, c$  の取り方で決まり、2 5 種類ある。

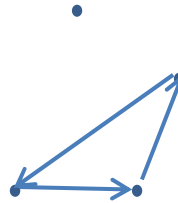
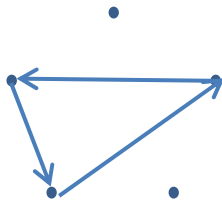
つまり、0 軸対称な図は、2 5 種類ある。

#### 4. サイクル合同

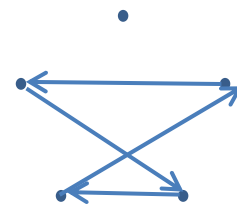
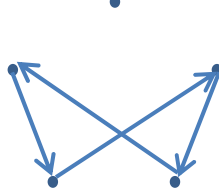
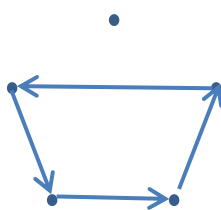
二つの図形が、サイクルを持ち、その向きだけが、逆順になってい

るとき、サイクル合同という。

三角形のサイクル2種、四角形サイクル3種の合計5種がある。



①



① のサイクルを持つ図形は、式を一つにまとめて表すことができる。

$a = 0, 1, 2, 3, 4$  のいずれかとして、( $a = 0$ のときは、反転すれば、サイクル合同を得る)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & a+1 \\ 3 & 3 & 4 & a+2 & 3 \\ 4 & 0 & a+3 & 4 & 4 \\ 1 & a+4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a+3 & 3a & 2a+3 & 4a+2 \\ 4 & 4a+2 & a & a+3 & 4a+1 \\ 1 & a+1 & 2a+1 & 3a+1 & 4a+1 \\ 4a & 4a & 4a & 4a & 4a \end{pmatrix}$$

$a$  でまとめると、

$$a(4x^4 + 1) + x^3 + 4x^2 + 2x$$

$$a(4x^4 + x^3 + 4x^2 + x) + x^3 + 2x^2 + 3x + 1$$

$$a(4x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x) + x^3 + 1$$

$$a(4x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x) + x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$a(4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x) + x^3 + x^2 + 2x + 2$$

パラメータ  $\alpha$  でまとめると、

$$a\{4(x + \alpha)^4 + 1\} + (x + \alpha + 3)^3 + 4\alpha + 3$$

同様にして、サイクルが右回り = 負の回転の場合は

$$a\{4(x + \alpha)^4 + 1\} + (x + \alpha + 2)^3 + 4\alpha + 2$$

$a, \alpha$  が等しければ、サイクル合同となる。

他の場合

$$a\{4(x + \alpha)^4 + 1\} + 4(x + \alpha + 1)^3 + 4\alpha + 1$$

$$a\{4(x + \alpha)^4 + 1\} + 4(x + \alpha + 4)^3 + 4\alpha + 4$$

$$a\{4(x + \alpha)^4 + 1\} + 2(x + \alpha + 3) + 4\alpha + 4$$

$$a\{4(x + \alpha)^4 + 1\} + 2(x + \alpha + 2) + 4\alpha + 1$$

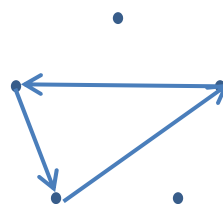
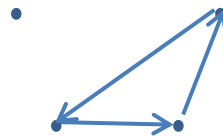
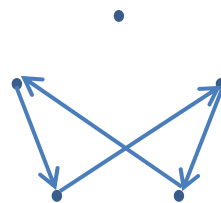
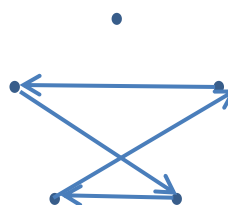
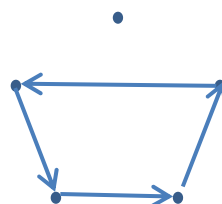
$$a(x + \alpha)(x + \alpha + 1)(x + \alpha + 4)(x + 2\alpha) + (x + \alpha + 1)^2 + 4\alpha$$

$$a(x + \alpha)(x + \alpha + 1)(x + \alpha + 4)(x + 2\alpha) + 4(x + \alpha + 4)^2 + 4\alpha$$

$$a(3x + \alpha)(3x + \alpha + 1)(3x + \alpha + 4)(3x + 2\alpha) + 2(3x + \alpha + 1)^2 + 3\alpha$$

$$a(3x + \alpha)(3x + \alpha + 1)(3x + \alpha + 4)(3x + 2\alpha) + 3(3x + \alpha + 4)^2 + 3\alpha$$

三角のときは、標準形を表す。  $5 \times 5 \times 5 = 125$  通り



具体的に、サイクル合同を求めると、(2, 4)の互換により

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}_m \text{ のサイクル合同は } \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_m$$

関数では、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}_p \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}_p$$

となり、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 4b & c \\ 0 & 1 & 0 & 3a & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}_p \text{ となるように、} a, b, c \text{ を定めることができる。}$$

他の5つの回転合同な関数もそれぞれ右回転で対応する。標準形どうしが対応する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

他のサイクル合同も、適当な、互換により、逆回転を求めることができる。グラフを見れば、互換がすぐにわかるが、関数から、互換を判断するにはどうしたらいいか？

## 5. 全単射の関数

1 次関数は、明らかに全単射である。

$Ax + B (A \neq 0)$  に対して、その写像の値は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} B \\ B+A \\ B+2A \\ B+3A \\ B+4A \end{pmatrix}_m \quad 2 \text{ 通りある。}$$

全て値が、異なるので全単射である

2 次関数は、全単射にならない。  $f(x) = Ax^2 + Bx + C (A \neq 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ B \\ A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} C \\ C+B+A \\ C+2B+4A \\ C+3B+4A \\ C+4B+A \end{pmatrix}_m$$

$B=0$  のときは、 $f(1)=f(4), f(2)=f(3)$  となる。

$B \neq 0$  のときは、差をとって積を考えると、

$$(B+A)(B+2A)(B+3A)(B+4A) = (B^2 + 4A^2)(B^2 + A^2) = B^4 + 4A^4 = 1 + 4 = 0$$

なので、 $f(1), f(2), f(3), f(4)$  のいずれかは、 $f(0)$  に等しいので全単射とならない。

4 次関数は、全単射とならない。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}_m = \begin{pmatrix} a \\ 4b+2c+3d+e \\ 4b+c+d+4e \\ 4b+3c+2d+e \\ 4(a+b+c+d+e) \end{pmatrix}_p$$

全単射ならば、 $a+b+c+d+e=0$  となり、4 次関数とならない。

$x^3$  の値は、0, 1, 3, 2, 4 であるから、全単射である。よって

$x^3+1, x^3+2, x^3+3, x^3+4$  も全単射である。また、これらは標準形なので、更に  $5 \times 5 = 25$  通りあり、 $f(x)$  が全単射ならば、 $kf(x)$  も全単射である。 $k$  の取り方 4 通りなので、結局  $25 \times 4 = 100$ 、1 次関数の全単射 20 と合わせて 120 通り全てとなる。

一般の素数  $P$  についても、1 次関数は全単射、2 次関数、および  $P-1$  次関数については、全単射ではないことがわかる。

全単射を、グラフの立場から見ると、各点の次数がすべて 2 であること

写像の立場からみると、全射であること

関数の立場から見ると、 $p=5$  のときは

1 次関数のとき自明、3 次関数のときは、標準形が

$$A(x+\alpha)^3 + D + 4\alpha \quad \text{の形}$$

$P=7$  のときは、1 次関数、4 次関数、5 次関数が全単射になる事がわかる。

一般のときは、どうなるか？

## 6. 置換

写像の中で、特に、全単射のものを、置換と呼ぶことにする。  
したがって、全単射の関数に対応する。1次式か、3次式である。  
置換（名前の付け替え）によって位相的に同型なグラフに移る。  
これを、同型変換と呼ぶことにする。

$$S = \left\{ \sigma \mid \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix} \in \text{写像全体} \right\}$$

とすると

$$T = \left\{ \sigma \mid \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix} \in \text{置換全体} \right\}$$

同型変換は、 $S : \sigma \rightarrow \tau^{-1}\sigma\tau \quad \tau \in T$  と表される。

互換（1 0 通り）とき、成り立つ。

一般のときは、互換の積で表されるので、成り立つ。

この時、 $\sigma$  と  $\tau^{-1}\sigma\tau$  は位相的に同型である

### 定義

二つの関数の差が、定数のとき、同組と呼ぶことにする。

つまり、 $f(x) - g(x) = k(0, 1, 2, 3, 4)$

二つの関数が、標準形の式で、 $\alpha$  の値の違いのみのとき、

合同と呼ぶことにする。改めて標準形で、定義した。

$$F(x, \alpha) = A(x + \alpha)^4 + C(x + \alpha)^3 + D(x + \alpha)^2 + E + 4\alpha$$

つまり、

$$f(x) = F(x, \alpha), g(x) = F(x, \alpha')$$

回転合同を改めて、合同と言い直す。

二つの関数が、以下の式で、 $\alpha$  の値の違いのみのとき、

同族と呼ぶことにする。

$$F(x, \alpha) = A(x + \alpha)^4 + C(x + \alpha)^3 + D(x + \alpha)^2 + E$$

$$f(x) = F(x, \alpha), g(x) = F(x, \alpha')$$

これは、合同の場合の、 $4\alpha$ の項がないだけである。

二つの関数の値についてその値が以下のとき、

同順とよぶことにする。

$$\text{同順とは、}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}_m, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & c & d & e & a \end{pmatrix}_m, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ c & d & e & a & b \end{pmatrix}_m, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ d & e & a & b & c \end{pmatrix}_m, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ e & a & b & c & d \end{pmatrix}_m \text{のいずれかに等しいときをいう。}$$

$f_1, f_2$  が、合同、同組、同族、同順のとき、  
その写像 $\sigma_1, \sigma_2$ についても、同様によぶことにする。

## 定理

- ①  $f$ と $g$ が、合同のとき、 $f$ : 全単射のならば、 $g$ も全単射である。
- ②  $f$ と $g$ が、同組のとき、 $f$ : 全単射のならば、 $g$ も全単射である。
- ③  $f$ と $g$ が、同族のとき、 $f$ : 全単射のならば、 $g$ も全単射である。
- ④  $f$ と $g$ が、同族のとき、 $f$ の値と $g$ の値は、同順である。
- ⑤  $f$ と $g$ が、同族のとき、 $f$ の逆置換と $g$ の逆置換は、同組である。

証明 ① 5つの合同の写像の値は、
$$\begin{pmatrix} a & b+4 & c+3 & d+2 & e+1 \\ b & c+4 & d+3 & e+2 & a+1 \\ c & d+4 & e+3 & a+2 & b+1 \\ d & e+4 & a+3 & b+2 & c+1 \\ e & a+4 & b+3 & c+2 & d+1 \end{pmatrix}$$
なので

ある列が、全単射ならば、他の列も全単射であることがわかる。

② 5つの同組の写像の値は
$$\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 & a+3 & a+4 \\ b & b+1 & b+2 & b+3 & b+4 \\ c & c+1 & c+2 & c+3 & c+4 \\ d & d+1 & d+2 & d+3 & d+4 \\ e & e+1 & e+2 & e+3 & e+4 \end{pmatrix}$$
なので、

ある列が、全単射ならば、他の列も全単射であることがわかる。

③ 同族のときは、

$$F(x, \alpha) = A(x + \alpha)^4 + C(x + \alpha)^3 + D(x + \alpha)^2 + E \text{ として}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & E+D+C+A & E+2D+4C+A & E+3D+4C+A & E+4D+C+A \\ D & D+2C+4A & D+4C+2A & D+C+3A & D+3C+A \\ C & C+A & C+4A & C+4A & C+A \\ 0 & 4A & 3A & 2A & A \\ A & A & A & A & A \end{pmatrix}_p$$

$$= \begin{pmatrix} E & E+D+C+A & E+2D+4C+A & E+3D+4C+A & E+4D+C+A \\ E+D+C+A & E+2D+4C+A & E+3D+4C+A & E+4D+C+A & E \\ E+2D+4C+A & E+3D+4C+A & E+4D+C+A & E & E+D+C+A \\ E+3D+4C+A & E+4D+C+A & E & E+D+C+A & E+2D+4C+A \\ E+4D+C+A & E & E+D+C+A & E+2D+4C+A & E+3D+4C+A \end{pmatrix}_m$$

ある列が、全単射ならば、他の列も全単射であることがわかるので、③④が示された。

⑤ については、 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}_m$  の同族は、同順なので、適当な数

$$k \text{ が存在して、 } \sigma_2 = \begin{pmatrix} k & 1+k & 2+k & 3+k & 4+k \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}$$

表記の仕方が異なるが、写像として同じものと、みなせる。

$$\sigma_1, \sigma_2 \text{ が同族でそれぞれの、逆置換は、}$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}_m$$

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ k & 1+k & 2+k & 3+k & 4+k \end{pmatrix}_m$$

更に、それぞれの関数を考えると、 $f_1, f_2 = f_1 + k$  となる。QED

全単射の同族の中に、必ず、対称的な、 $\sigma^2 = i$  が存在する。

「回転合同は、次の 1 次関数で表されることがわかる。」

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, f_0(x) = x$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, f_1(x) = x + 1$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, f_2(x) = x + 2$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, f_3(x) = x + 3$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f_4(x) = x + 4$$

$f_0, f_1, f_2, f_3, f_4$  は、それぞれ合同ではないが、同組かつ同族である。

「任意の合同な、5 つの写像  $\tau_i$  に対して、 $\sigma_i$  による同型変換

(回転合同変換) は、それぞれ合同になる。」

| 合同                                       |   | 合同                                                                                                                         |      |
|------------------------------------------|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| $\tau_0$                                 |   | $\sigma_i^{-1}\tau_0\sigma_i$                                                                                              |      |
| $\tau_1 = \sigma_1^{-1}\tau_0\sigma_1$   | → | $\sigma_i^{-1}\tau_1\sigma_i = \sigma_1^{-i}\sigma_1^{-1}\tau_0\sigma_1\sigma_1^i = \sigma_1^{-i-1}\tau_0\sigma_1^{i+1}$   | となる。 |
| $\tau_2 = \sigma_1^{-2}\tau_0\sigma_1^2$ |   | $\sigma_i^{-1}\tau_2\sigma_i = \sigma_1^{-i}\sigma_1^{-2}\tau_0\sigma_1^2\sigma_1^i = \sigma_1^{-i-2}\tau_0\sigma_1^{i+2}$ |      |
| $\tau_3 = \sigma_1^{-3}\tau_0\sigma_1^3$ |   | $\sigma_i^{-1}\tau_3\sigma_i = \sigma_1^{-i}\sigma_1^{-3}\tau_0\sigma_1^3\sigma_1^i = \sigma_1^{-i-3}\tau_0\sigma_1^{i+3}$ |      |
| $\tau_4 = \sigma_1^{-4}\tau_0\sigma_1^4$ |   | $\sigma_i^{-1}\tau_4\sigma_i = \sigma_1^{-i}\sigma_1^{-4}\tau_0\sigma_1^4\sigma_1^i = \sigma_1^{-i-4}\tau_0\sigma_1^{i+4}$ |      |

「任意の写像  $\tau$  に対して、合同変換による同型変換は、合同である。」

| 合同               |   | 合同                                                        |     |
|------------------|---|-----------------------------------------------------------|-----|
| $\sigma_0: \tau$ | → | $\sigma_0^{-1}\tau\sigma_0 = \tau$                        | となる |
| $\sigma_1: \tau$ |   | $\sigma_1^{-1}\tau\sigma_1$                               |     |
| $\sigma_2: \tau$ |   | $\sigma_2^{-1}\tau\sigma_2 = \sigma_1^{-2}\tau\sigma_1^2$ |     |
| $\sigma_3: \tau$ |   | $\sigma_3^{-1}\tau\sigma_3 = \sigma_1^{-3}\tau\sigma_1^3$ |     |
| $\sigma_4: \tau$ |   | $\sigma_4^{-1}\tau\sigma_4 = \sigma_1^{-4}\tau\sigma_1^4$ |     |

「反転合同も、1 次関数で表されることがわかる。」

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, g_0(x) = 4x$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, g_1(x) = 4x + 3$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, g_2(x) = 4x + 1$$

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, g_3(x) = 4x + 4$$

$$\rho_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}, g_4(x) = 4x + 2$$

$g_0, g_1, g_2, g_3, g_4$  は、それぞれ合同かつ同組かつ同族である。

「任意の合同な、5つの写像に対して、 $\rho_i$  による同型変換  
(反転合同変換) は、それぞれ合同になる。」

| 合同                                                                                                                                                                                               |   | 合同                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\tau_0$                                                                                                                                                                                         |   | $\rho_i^{-1} \tau_0 \rho_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| $\rho_i :$<br>$\tau_1 = \sigma_1^{-1} \tau_0 \sigma_1$<br>$\tau_2 = \sigma_1^{-2} \tau_0 \sigma_1^2$<br>$\tau_3 = \sigma_1^{-3} \tau_0 \sigma_1^3$<br>$\tau_4 = \sigma_1^{-4} \tau_0 \sigma_1^4$ | → | $\rho_i^{-1} \tau_1 \rho_i = \rho_i^{-1} \sigma_1^{-1} \tau_0 \sigma_1^1 \rho_i = \sigma_1^1 \rho_i^{-1} \tau_0 \rho_i \sigma_1^{-1} = \sigma_1^{-4} \rho_i^{-1} \tau_0 \rho_i \sigma_1^4$<br>$\rho_i^{-1} \tau_2 \rho_i = \rho_i^{-1} \sigma_1^{-2} \tau_0 \sigma_1^2 \rho_i = \sigma_1^2 \rho_i^{-1} \tau_0 \rho_i \sigma_1^{-2} = \sigma_1^{-3} \rho_i^{-1} \tau_0 \rho_i \sigma_1^3$<br>$\rho_i^{-1} \tau_3 \rho_i = \rho_i^{-1} \sigma_1^{-3} \tau_0 \sigma_1^3 \rho_i = \sigma_1^3 \rho_i^{-1} \tau_0 \rho_i \sigma_1^{-3} = \sigma_1^{-2} \rho_i^{-1} \tau_0 \rho_i \sigma_1^2$<br>$\rho_i^{-1} \tau_4 \rho_i = \rho_i^{-1} \sigma_1^{-4} \tau_0 \sigma_1^4 \rho_i = \sigma_1^4 \rho_i^{-1} \tau_0 \rho_i \sigma_1^{-4} = \sigma_1^{-1} \rho_i^{-1} \tau_0 \rho_i \sigma_1^1$ |

$\rho_i^{-1} \sigma_1^{-1}$  の関数は、 $(4x-3i) \circ (x-1) = 4(x-1) - 3i = 4x+1+2i$

$\sigma_1 \rho_i^{-1}$  の関数は、 $(x+1) \circ (4x-3i) = (4x-3i) + 1 = 4x+2i+1$

$\rho_i \sigma_1^{-1}$  の関数は、 $(4x+3i) \circ (x-1) = 4(x-1) + 3i = 4x+1+3i$

$\sigma_1 \rho_i$  の関数は、 $(x+1) \circ (4x+3i) = (4x+3i) + 1 = 4x+3i+1$

$\rho_i^{-1} \sigma_1^{-1} = \sigma_1 \rho_i^{-1}, \rho_i \sigma_1^{-1} = \sigma_1 \rho_i$  が成り立つ。

「このこと、合同を、合同に移す。

$(2x, 2x+1, 2x+2, 2x+3, 2x+4)$   
 $(3x, 3x+1, 3x+2, 3x+3, 3x+4)$  についても、成り立つ。

は、合同かつ同組かつ同族であり、その同型変換は、合同である。

3 次関数の合同な、その同型変換については、合同にはならない。」

「任意の写像 $\tau$ に対して、同族 $\rho_i$ による同型変換は、合同である。」

合同

合同

$$\begin{aligned} & \rho_0^{-1} \tau \rho_0 \\ \rho_0: \tau & \rightarrow \rho_0^{-1} \tau \rho_0 = (\sigma_1^{-1} \rho_0^{-1}) \tau (\rho_0 \sigma_1) = \sigma_1^{-1} \rho_0^{-1} \tau \rho_0 \sigma_1 \\ \rho_1: \tau & \rightarrow \rho_1^{-1} \tau \rho_1 = (\sigma_1^{-2} \rho_0^{-1}) \tau (\rho_0 \sigma_1^2) = \sigma_1^{-2} \rho_0^{-1} \tau \rho_0 \sigma_1^2 \\ \rho_2: \tau & \rightarrow \rho_2^{-1} \tau \rho_2 = (\sigma_1^{-3} \rho_0^{-1}) \tau (\rho_0 \sigma_1^3) = \sigma_1^{-3} \rho_0^{-1} \tau \rho_0 \sigma_1^3 \\ \rho_3: \tau & \rightarrow \rho_3^{-1} \tau \rho_3 = (\sigma_1^{-4} \rho_0^{-1}) \tau (\rho_0 \sigma_1^4) = \sigma_1^{-4} \rho_0^{-1} \tau \rho_0 \sigma_1^4 \\ \rho_4: \tau & \rightarrow \rho_4^{-1} \tau \rho_4 = (\sigma_1^{-5} \rho_0^{-1}) \tau (\rho_0 \sigma_1^5) = \sigma_1^{-5} \rho_0^{-1} \tau \rho_0 \sigma_1^5 \end{aligned}$$

同族のとき、 $\rho_i = \rho_0 \sigma_1^i, \rho_i^{-1} = \sigma_1^{-i} \rho_0^{-1}$  が成り立つ。なぜならば、

$$\rho_0: A(x+0)^3 + B(x+0) + C = Ax^3 + Bx + C$$

$$\rho_i: A(x+i)^3 + B(x+i) + C = (Ax^3 + Bx + C) \circ (x+i)$$

$$\rho_i = \rho_0 \sigma_1^i = \rho_0 \sigma_1^i$$

このことは、置換以外の写像についても、成り立つ。

一般の写像の逆写像（逆関数、多価）を定義し積、また、その結果について、簡約則をきめなければならないと思います。

具体的な例で、考えると（矛盾なく、定義されているか？）

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}_m, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}_m \quad \text{は同族で}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}_m \quad \text{を、同型変換と同じように、} x \quad \text{と} \quad y \quad \text{を交換して、逆関数}$$

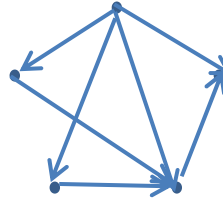
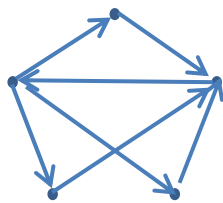
（多価）を考えて、その写像はそれぞれ、

$$\sigma_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \times & 0 & \times & 1 & 4 \\ & 2 & & & \\ & 3 & & & \end{pmatrix}_m, \sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \times & 1 & \times & 0 & 3 \\ & 2 & & & \\ & 4 & & & \end{pmatrix}_m$$

$$\sigma_0^{-1} \tau \sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \times & 0 & \times & 1 & 4 \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1^{-1} \tau \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \times & 1 & \times & 0 & 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

それぞれのグラフは、



$$\sigma_0^{-1}\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \times & 0 & \times & 1 & 4 \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & & 2 & 2 & \\ 3 & & 3 & 3 & \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_0 \sigma_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \times & 0 & \times & 1 & 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \times & 1 & \times & 3 & 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1^{-1}\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \times & 1 & \times & 0 & 3 \\ & 2 & & & \\ & 4 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ & 2 & 2 & & 2 \\ & 4 & 4 & & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \times & 1 & \times & 0 & 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \times & 1 & \times & 3 & 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

逆関数まで、グラフを、広げるとその積を含めて様々なグラフを  
考えることが、できる。

### まとめ

- ① 合同については、標準形にすることによって、  
図で確認することなしに、関数上で判別できる。
- ② 写像と関数の変換行列の一般式を求めることができる。
- ③ 合同と反転について、適当な行列により求めることが  
できる。
- ④ 置換による同型変換を関数によって、特徴づけができる。

### 課題

- ① 一般の素数  $p$  について、全単射を見つけること。
- ② 二つの素数の関係（埋め込みがどのようになされるか？）
- ③ 逆関数に拡張して多重にする（陰数関数を利用）場合  
その積や、簡約則を決めること。

島袋 清