

学習ノート Part 1 から Part4 まで書いて、その結論をできるだけわかりやすく簡潔にまとめてみたい。数学的論証などは全て学習ノートのほうを見てもらうことにする。 杉本明秀

「 $1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12}$ というのを先生が話していましたけれども本当ですか？」

ネット上でそんな質問があちこちで見られるようになっている。リーマン・ゼータ関数に由来する不思議な等式はかなりの広範囲で話題になっているようだ。それに対する回答は、大きく分けて3通りある。それを紹介する前にまずゼータ関数を説明しよう。

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots \quad (1)$$

s を実数として、ゼータ関数 $\zeta(s)$ は、 $s > 1$ で収束、 $s \leq 1$ で発散である。さらに s を複素数としても、 s の実数部分 $\text{Re}(s) > 1$ で収束、 $\text{Re}(s) \leq 1$ で発散である。

たとえば $s = 2$ のとき、 $\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ となることをオイラー

が求めたのは有名である。 $(s = 4, 6, 8, \cdots)$ のすべての $\zeta(s)$ も求めている

さらにオイラーは、なんと $s = 0, -1, -2, \cdots$ の $\zeta(s)$ まですべて求めてしまったのである。その時の求め方には若干問題があるのだが、リーマンが、正しいやり方で、このゼータ関数を $s = 1$ を除く全複素平面に拡張（解析接続という）することによってオイラーの正しさ

を証明したのである。だから例えば $s = -1$ のとき $\zeta(-1)=-\frac{1}{12}$ と求まったものだから、

(1) で $s = -1$ を代入すると $\zeta(-1)=1+2+3+4+\cdots$ となり、よって $1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12}$ という摩訶不思議な等式が導かれたわけである。そこで最初の質問となった。それへの3通りの回答を紹介する。

[A0] そんなことは絶対ない。 ∞ になる。先生は間違っている。

[A1] 解析接続で $\zeta(-1)=-\frac{1}{12}$ となったからといって、 $s = -1$ のときにも $\zeta(s)$

が、 $\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots$ の形をしているわけではない。だから、 $1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12}$ とすべきではない。

[A2] ゼータの世界では $1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12}$ は常識であり、それは解析接続

によって正当化されているばかりか実際に役に立っている。それに自然界でもそのような計算が有効であることがある実験で示されている。

いろんなニュアンスの違いはあっても、大体以上の3通りである。

[A0] は間違っていない。ただ、ゼータ関数に由来する摩訶不思議な等式についてそもそも知らないでの回答なので質問にかみ合っていない。質問にかみ合っているのは [A1] と [A2] である。

[A1] は正しい。きわめて大事な指摘である。ゼータ関数を全複素平面 ($s \neq 1$) に拡張すなわち解析接続したからといって元の定義の形が保たれるわけではない。たとえば複

素関数 $f(z)=1+z+z^2+z^3+\cdots$ は、 $|z|<1$ でのみ収束して意味を持つ。この $f(z)$ を全複

素平面 ($z \neq 1$) に解析接続すればそれは $g(z)=\frac{1}{1-z}$ になる。だからといって全複素平面

でも $f(z)=1+z+z^2+z^3+\cdots=g(z)=\frac{1}{1-z}$ とはならないことは明らかである。だから例え

ば $z=2$ のとき、 $g(2)=-1$ になったからといって、 $1+2+2^2+2^3+\cdots=-1$ ではないという
こと。それはイロハである。同じことがゼータ関数にもいえるということである。

だから “**[A1]が正しく[A2]は間違い**”で終わり、一件落着、となるかというそうはな
らないのだ。それがこの問題の複雑であり奥深いところでありかつまた面白いところであるとい
えようか。 [A1] の指摘など [A2] の側は百も承知なのである。勿論知らないで受
け売りという人もたくさんいるだろう。しかし [A2] の発信源には、ゼータ関数の権威ある
専門家がいて、権威ある出版社を通じて [A2] の内容が全国に流れているのである。勿論冒
頭の質問は [A2] の内容を受けてのことである。そしてゼータ関数について深く知っている

人からすれば、[A1] の指摘など百も承知、それでもゼータの世界では $1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12}$

でOKと言い切れる確信があるのである。 私の知る限り、その確信の根拠になることが2つ
あるのだ。それを知らない [A1] の回答は、それゆえ、正しい指摘ではあるがことゼータ関
数に関しては、全く不十分なのである。言ってみれば [A1] の回答は、間違いではないがや
はり質問に対して深いところがかみ合っていないのである。

さあ、その2つの根拠とは何か？それはすでに [A2] の中に出ている。

[K1] その1つは、 $1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12}$ を使って**実際に数学でも工学で**

も役に立つという事実である。

[K2] いま1つは、カシミールが予言したカシミール力、それを実証したラモロー
の実験で、 $1+2^3+3^3+4^3+\cdots=\frac{1}{120}$ ($=\zeta(-3)$) の**計算の正しさが認められたという事実**で
ある。

[K1] も [K2] も、なんとも衝撃的な事実である。ところがところがである。

[K1] と [K2] について調べて考察したところ**どちらにも重大な間違いがある**のである。
まず [K1] から述べていこう。私が実際に役に立っているということを知ったのは杉岡幹生
氏のサイトでであった。氏のテラーシステムというのは、ある三角級数 $g(x)$ をべき級数
 $f(x)$ に転換し、そのあと $x=\pi/2$ などを代入して奇数ゼータなどの特殊値を求める画期的な
方法である。そのなかで三角級数 $g(x)$ を一旦二重級数に転換しそのあと、列和を加えていって
 $f(x)$ を構成しているのである。(その、行和の総和を列和の総和に転換する方法を私は略して
「行・列転換」と呼ぶことにする)その列和の中に、 $1-2+3-4+\cdots$ や $1-2^3+3^3-4^3+\cdots$ など
がもろに出てくる場合があるのである。それらは発散であるが、ゼータの世界では $\zeta(s)$ とそ
の交代級数 $\phi(s)$ との間に簡単な転換式があるのだ。

$\phi(s)=(1-2^{1-s})\zeta(s)$ である。 そこで $1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12}$ から

$1-2+3-4+\cdots=\frac{1}{4}$ が求まり、それを代入して $f(x)$ が求まるのである。そしてその $f(x)$ の

正しさは検証されるので、**結局 $1-2+3-4+\cdots=\frac{1}{4}$ でなければならない、したがって $1+2+3+4+$**

$\cdots=-\frac{1}{12}$ でなければならないということになったのである。それから、工学の或る分野の専門

家のあいだでは周知の公式であるという話も伝わってきた。

ところが私がいろいろ学習した結果、「行・列転換」 $g(x) = f(x)$ を保証するものはアーベル総和法であるということがわかったのである。一般に総和法とは、発散級数を有限値に対応させる写像のことである。アーベル総和法とは、無限級数 $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ に対して、 $|x|$

< 1 なる x の x^n を各項にかけたものを考え、その $u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \cdots$ の x を内側から

1 に近づけたときの収束値 s を対応させる総和法のことである。(わたしは s のことをアーベル

和とよんでいる) 例えば $1-2+3-4+\cdots$ のアーベル和は、 $\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-2x+3x^2-4x^3+\cdots)$

$= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{4}$ だから $\frac{1}{4}$ である。 「三角級数 $g(x)$ を一旦二重級数に転換しそのあ

と、列和を無限に加えていって $f(x)$ を構成」と書いたが、各列和が発散してもアーベル和が存在するならばその和の $f(x)$ について

$f(x) = g(x)$ の**アーベル和**という等式が成り立つのである。つまり、

列和のアーベル和の総和 $f(x) = g(x)$ のアーベル和 (*) ということ。

そしてアーベル総和法では $g(x)$ が収束するときは $g(x)$ のアーベル和は $g(x)$ なので、そのときは $f(x) = g(x)$ である。これが、収束する三角級数 $g(x)$ を $f(x)$ に転換するさいに、

たとえば $1-2+3-4+\cdots$ を $\frac{1}{4}$ に置き換えて OK の根拠である。アーベル総和法が(*)の等式

を支えているのだ。だから、どんな場合でも $1-2+3-4+\cdots$ を $\frac{1}{4}$ に置き換えて OK としては

いけないということ。しかも単独で $1-2+3-4+\cdots$ を $\frac{1}{4}$ に置き換えることなどないというこ

と。つまり $1-2+3-4+\cdots=\frac{1}{4}$ というのは正しい等式ではなく、正しくは $1-2+3-4+\cdots$

のアーベル和 $= \frac{1}{4}$ なのである。“ ” の意味をアーベル和と決めれば “ $1-2+3-4+\cdots$ ” $= \frac{1}{4}$

も正しい等式になる。まあここまでなら [K 1] における重大な間違いなんていうほどではないかもしれない。しかし、**根拠がアーベル総和法である**ということは、もし列和に例えば $1+2$

$+3+4+\cdots$ がもろに出てきたときにそれを $-\frac{1}{12}$ に置き換えることができないという決定的な

事実が突きつけられるのである。なぜなら $1+2+3+4+\cdots$ のアーベル和は ∞ になってしまい、

存在しないからである。[$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1+2x+3x^2+4x^3+\cdots) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{(1-x)^2} = \infty$]

だから、 $1-2+3-4+\dots=\frac{1}{4}$ がいて役に立っているというのはOKだけれど、 $1+2+3$

$+4+\dots=-\frac{1}{12}$ がいて役に立っているということは全くの間違いなのである。つまり解析接続で

$1+2+3+4+\dots=-\frac{1}{12}$ と $1-2+3-4+\dots=\frac{1}{4}$ がいたとしても、前者は使えず後者は使える

ということから、**解析接続にはなんの威力もないということがいえるのである**。役に立つ根拠は解析接続ではなくアーベル総和法の威力であるということの確認は決定的に大事だということである。〔(＊)の右辺が $g(x)$ のアーベル和であるということは $g(x)$ が発散してもアーベル和が存在すればOKである。だから $0 < x < 2\pi$ で $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots$ は発散するが、アーベル和が存在して $-\frac{1}{2}$ なので、 $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots$ のアーベル和 $= -\frac{1}{2}$ である。よく

本に、 $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots = -\frac{1}{2}$ と書かれていたりするけど間違いである。学習ノート

に書いていないが、さらに、 $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots$ について同じように考察するとオイラーの関数等式が導かれる。それは。また別の機会に発表したい。〕

次、[K 2] を検討する。

自然界で $1+2^3+3^3+4^3+\dots=\frac{1}{120}$ ($=\zeta(-3)$) の計算の正しさが実証されたかの

ように伝わっていたが、[K 1] の検討の結果から、当初は、 $1+2^3+3^3+4^3+\dots$ のアーベル和は ∞ になって存在しないので $1+2^3+3^3+4^3+\dots$ がもろに出てくるはずがない、もろに出てきたのは $1-2^3+3^3-4^3+\dots$ であろう、と思っていたのだが、いや、 $1+2^3+3^3+4^3+\dots$ がもろに出てくることわかった。それではもろに出てきた $1+2^3+3^3+4^3+\dots$ を $\zeta(-3)$ すなわち $\frac{1}{120}$ に置き換えたのだろうか？わりとそんな風に誤解されて広まっているのだけれど、元の

種本というべき「絶対カシミール元」という本ではそうは言っていないのである。発散を上手く消した「繰り込み理論」であり $\frac{1}{120}$ は「繰り込み値」であるとなっている。 $1+2^3+3^3+4^3+\dots$

を $\frac{1}{120}$ に置き換えたのではない、ということは、[K 1] での「行-列転換」との決定的な違いで

ある。それだけでも $1+2^3+3^3+4^3+\dots=\frac{1}{120}$ ($=\zeta(-3)$) の計算の正しさなどというべき

ではないのである。それでも、「繰り込み理論」によってなぜ実験で検証された正しい数値 $\zeta(-3)=\frac{1}{120}$ が出てくるのか、その謎は残る。で、その「繰り込み理論」であるが、カシミールも「絶対カシミール元」の著者も、数学的には全くの誤りであると言いかうがないのである。しかしそれでも正しい値が求まった。それはいったい何故なのか？その謎解きがメインテーマになったのである。その謎解き、詳しくは Part4 を見て欲しいが、

$$1+2^3+3^3+4^3+\dots=\sum_{n=1}^N n^3=\frac{1}{4}B_4(N)-\frac{1}{4}B_4(0)=S(N)-S(0) \text{ において、 } N \rightarrow$$

∞ で本当は $S(N) \rightarrow \infty$ なのに、むりやり $S(N) \rightarrow 0$ として、(正しい数値) $-S(0) (= -\frac{1}{4}B_4(0))$

$= \frac{1}{120} = \zeta(-3)$ を取り出しているのである。むりやり $S(N) \rightarrow 0$ にする方法は、カシミール

の場合は、いわゆるカットオフ関数をかけることであり、「絶対カシミール元」という本では、適用できない定理をムリヤリ適用することであつたりと違いはある。が、とにかくむりやり $S(N) \rightarrow 0$ にしてしまつて $-S(0)$ を取り出すというのがカシミールの繰り込み理論のカラクリ

である。だから、カシミール型の繰り込み理論とは、発散級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$ を $-S(0)$ に移す写像、

すなわち総和法だということである。でも、総和法だからといって、なにか謎解きが進展したのかというと全くそんなことはないということ。総和法であるということと繰り込み理論であるということは同義反復でしかない。そこが「行-列転換」の数学的根拠がアーベル総和法であつたこととの決定的違いである。こっちの総和法(わたしは仮にT総和法と名づけたが)は $-S(0)$ を導く数学的根拠に全然ならないのだ。[K 1]での(*)のようなものはいえないのである。

だからカラクリというのである。だから、**実験で** $1+2^3+3^3+4^3+\dots = \frac{1}{120}$ の**計算の正し**

さが認められたというのは間違いである。

以上で検討は終わりである。しかし新たな課題が浮かび上がった。

[K 2]の検討の結果からはカシミールの「繰り込み理論」が本来の理論のあり方からすれば歪んだ理論であるということがいえるのである。ただテクニックにすぐれているだけとさえいえるのである。私の予想では、発散を消そうとするどんなテクニックを使おうとも取り

出される有限値は正しい数値 $-S(0) = \frac{1}{120} (= \zeta(-3))$ 以外に出てこないと思う。それだ

から、歪んだ「繰り込み理論」に「安住」していられるのだ。そういう「繰り込み理論」の問題点解決、歪みの解消のための基本方向はなにか。それは次のようなものである。もし私に、

数学の側には何の問題もないという磐石の確信があれば、カシミールエネルギーは $\lim_{N \rightarrow \infty}$

$\{\sum_{n=1}^N n^3 - \int_0^N x^3 dx\}$ ではなく $\lim_{N \rightarrow \infty} \{\sum_{n=1}^N n^3 - \frac{1}{4}B_4(N)\}$ という形に物理学的には定式化

されなければならない、 $\lim_{N \rightarrow \infty} \{\sum_{n=1}^N n^3 - \frac{1}{4}B_4(N)\}$ にこそ物理的意味があるはずである、と

予言者のようにいえるのだが数学にも懸念をいっているのでそうとだけもいえない。しかし

とにかく、もしも $\lim_{N \rightarrow \infty} \{\sum_{n=1}^N n^3 - \frac{1}{4}B_4(N)\} = \zeta(-3)$ がカシミールエネルギーの物理的意

味だということになれば、初めから発散もなく万事めでたく完全解決になるのである。そのとき

には $\zeta(-3)$ は、繰り込み値などという訳のわからないものではなくちゃんとした物理量という規定を受け取れることになるのである。[ところで実は、 $\sum_{n=1}^N n^3 - \frac{1}{4}B_4(N) = \zeta(-3)$ は、N

に関係ない恒等式なのである。 $\lim_{N \rightarrow \infty}$ などあつてもなくても同じなのだ。そのことの意味を考え

ることも大事なように思われる。]

さて、[K 1] と [K 2] の間違いは明らかになったと思う。では [A 2] のような内容を、そもそも発信すべきではない、という結論になるであろうか？ そんなことはないと思

う。 $1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12}$ というのは、決して嘘八百のでたらめではなく、十分そう言えそ

うな「根拠」もあるのである。それは本当に不思議で、強烈に興味をかき立たせるものであった。そういう発信が多くの人に数学的関心を湧き立たせたことも間違いない。ただ、これまでの検討結果にはしっかり踏まえるべきだと思う。それだから、冒頭の質問に対する回答、私が考える [A 3] は、次のようになる。

[A 3] もちろん正しくはない。でも、 $1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12}$ と言ってもおかしくないような不思議な謎があることも本当です。その謎解きは最高に面白く奥深いので是非挑戦してください。

2010年9月25日 記

杉本連絡先Eメール sugimoto315@y9.dion.ne.jp

学習ノートは、佐藤郁郎氏のサイトhttp://www.geocities.jp/ikuro_kotaro/koramu.htm

2009年94、102、122、123、2010年120に載せさせて頂いています。