

## 学習ノート Part 4

### 「カシミール効果とゼータ関数をめぐる新たな謎解き」

杉本 明秀

[ I ] ラモローの実験は本当に、 $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = \frac{1}{120}$ を示したと

いえるのか？……①②③④⑤

[ II ] 繰り込み理論のカラクリ。問題点とその解決のための方向について。

……⑥⑦⑧⑨⑩

[ III ] 解析接続の本当の威力……⑪⑫⑬

[ IV ] T総和法と $\zeta^*(s)$ について……⑭⑮⑯⑰

[ I ] ラモローの実験は本当に、 $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = \frac{1}{120}$ を示したといえるのか？

①私は、昨年(2009 年)3 月から 6 月にかけて、「負整数でのゼータ関数についての謎解き」という題の「学習ノート」Part1~Part3 を発表した。その中で、杉岡幹生氏のテイラーシステムすなわち三角級数からべき級数への転換についての数学的根拠を明らかにしたと思っている。(この転換は本質的にオイラーのと同じなので、オイラー・杉岡パターンと呼ぶことにする。) リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の交代級数を $\phi(s)$ として、 $\phi(-1) = "1-2+3-4+\dots" = \frac{1}{4}$  や、 $\phi(-3) = "1^3-2^3+3^3-4^3+\dots" = -\frac{1}{8}$  等々が何故使えるのか、その核心的根拠はアーベル総和法、つまりアーベル和の存在ということであった。巷間よくいわれる解析接続ではない、ということ。なぜなら、もしも $\zeta(-1) = "1+2+3+4+\dots"$  がもろに出てくる場合にはそのアーベル和は $\infty$ で存在しないので $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$  が使えないからである。もし本当に解析接続が根拠になるというのであれば交代級数 $\phi(-1)$ にだけでなく $\zeta(-1)$ にも使えなければおかしいのだ。交代級数だけが OK ということ、それはアーベル総和法によってしか説明がつかない。それだから、岩波講座現代数学の基礎「数論 2」の P278 にある「 $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots = \dots$ 」なお上記のような発散級数の値を自然が零点振動・真空エネルギーとして計算していることが最近確認されている」というコメント、すなわち 1948 年カシミールが理論的に予測したカシミール効果とそれを実証した 1997 年のラモローの実験についてのコメントに対して私は自分の考察の結論から謎は明かされると考え、具体的に調べることなく放置していた。それはまことにうかつであった。私は、 $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots$  がもろに出てくるのではなく $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots$  がもろに出てきたはずである、そしてそのような発散する交代級数が無限個出てきたはずである、そのように考えていたのである。

②ところがどうもそうではない、 $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$  がもろに出てきているらしい、と言う話を聞いたのが今年の 3 月である。それからネットで調べいちばん具体的に説明されている F 氏のサイトを見つけた。F 氏のサイトには、「カシミール効果とは、真空の空間に平行な金属板を置くと微弱な力によってそれらが引き合うというもので、1948 年にヘンドリック・カシミールによって提唱され 1997 年にラモローにより実験的に確認された現象である。」にはじまってカシミールエネルギーの計算式を紹介、説明したあと「(カシミールエネルギー)  $E_{Casimir}[D]$  は、本質的には  $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = \sum_{n=1}^{\infty} n^3$  とかけるため、ゼータ関数の定義からこれは $\zeta(-3)$ を求めることに帰着できる。」として単位面積あたりのカシミールエネルギーとカシミール力の数値を求めている。つまりここでは $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots = \zeta(-3) = \frac{1}{120}$  がもろに、すなわち交代級数 $\phi(-3)$ を迂回せずに使われていて、その数値の正しさがラ

モローの実験で確認されたというように書かれているのである。さあ、びっくりである。もしそうなら、私の考察の結論は全く通用しない。のみならず、根拠はアーベル総和法であって解析接続ではないという私の結論はオイラー・杉岡パターンについてのみ真であって、一般的にはやはり解析接続である、ということになりうるのである。だから衝撃であったかというとなんてそんなことはなくて、杉岡氏のサイトを見たときの衝撃に比べれば月とすっぽんであった。もし、もろに  $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$  が出てきて、それを  $\frac{1}{120}$  にしてOKということになれば、何故OKなのかの新たな謎解きが始まる、その謎解きに挑戦できる喜びのほうがはるかに大きかった。

③F氏が根拠にしている本、参考文献としている本とは黒川信重・若山正人両氏共著の「絶対カシミール元」(岩波書店)という数学書であった。そこで急いで求めて読んでみた。さあ、読んでみてどうだったか。**結論。たしかに  $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$  がもろに出てくるが、その  $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$  を  $\frac{1}{120}$  すなわち  $(-3)$  の値に置き換えてはいないということである。**(実際にはもっとはるかに複雑な式なのだけれど、本質的に  $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$  と同じと言うことは私も確認したのでこの稿では以下もそのようにわかりやすく表現することにする。)つまり、オイラー・杉岡パターンでは、ゼータの交代級数、たとえば  $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots$  がもろに出てきて、その発散級数  $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots$  を  $-\frac{1}{8}$  と置き換えてOKだったのに比べて、このカシミールパターンでは  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots$  を  $\frac{1}{120}$  に置き換えてはいないということ。このことは重大な違いである。この点だけでも、私の結論「**根拠はアーベル総和法であって解析接続ではない**」という命題はしっかりと残るのである。このことをまずはっきりと確認したい。

そうは言っても、もろに  $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$  がでてきて、そのあとのもろもろの計算のあとでたしかに  $(-3) = \frac{1}{120}$  がでてくるともまた厳然たる事実である。「絶対カシミール元」では、発散する  $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$  から有限値を導く「繰り込み」として説明してあって  $(-3) = \frac{1}{120}$  は「繰り込み値」である、という説明になっている。以下、具体的に引用して検討してゆこう。

④「絶対カシミール元」ではP 20～21にこう書いてある。「1948年カシミールはカシミール効果を予言した。それは…単位を無視すれば物理的には  $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = \sum_{n=1}^{\infty} n^3$  と書けるものである。これは普通の意味では無限大になってしまう発散級数であり、カシミールはその真の意味を探るために量子力学ではよく使われる“無限大の繰り込み”を用いて有限の値  $\frac{1}{120}$  を出している。」「これは数学

的にはゼータ関数  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  の  $s = -3$  における値  $\zeta(-3) = \sum_{n=1}^{\infty} n^3$  でありゼータ関数論によれば

$\frac{1}{120}$  とわかっていたものであった。じっさいこの値は…1749 年頃にオイラーが求めていた」そう

してオイラーの求め方を示したうえで、しかしその求め方は、発散級数についての禁じ手を使った変形なので、次のように続けている。「このような発見的な方法をちゃんと数学に着地させることはそう簡単なことではない。一般にはまったく別に見えるやり方をする必要がある。いまの場合の標

準的な方法は積分表示によって  $\zeta(s)$  を解析接続しておいて  $\zeta(1-n) = (-1)^{n-1} \frac{B_n}{n}$  … (1)

( $n = 1, 2, \dots$ )  $B_n$  : ベルヌーイ数 を示すのである。」そのよう基本的な考えにもとづいて著者はカシミールエネルギーの値を求めてゆく。

結論として、1 辺の長さ  $L$  の 2 枚の金属板を平行に間隔  $a$  ( $L \gg a$ ) に置いたときのカシミールエネルギーの値を  $E_{\text{Casimir}}(a) = -\frac{L^2}{(4\pi)^2} \Gamma(2) \zeta(4) \frac{1}{a^3}$  … (2) と求めて

いる。そして次のようにコメントしている。「以上では、あらかじめプラナの和公式を用い

$E_{\text{Casimir}}(a)$  の値をとり出したが、その際に行った無限大の繰り込みは  $\zeta(-3)$  の値を  $s \leftrightarrow 1-s$  の関数等式を用いて  $\zeta(4)$  から求めるのに相当する」(p 33) さてこのコメントを読んだ人の多くは

$\sum_{n=1}^{\infty} n^3$  を  $\zeta(-3) = \frac{1}{120}$  に置きかえて求まったと勘違いすると思う。現に F 氏のサイトはそうだし、その他の様々な説明にも多く見られる。だがもちろん著者はそうは言っていないのである。序章の p 4～p 5 では、はっきりと次のように書いている。

「このカシミール効果は…リーマンのゼータ関数を用いると、 $\zeta(-3) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots = \frac{1}{120}$  という不思議な等式に対応している。これはそのままでは無限大に発散してしまうのだが数学においては解析接続という方法を用いることにより  $\zeta(-3)$  がちゃんとと求まるのである。物理学においては、同じことを無限大の繰り込み、つまり

“ $\{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\} - \infty$ ” = … (3) として解釈することになる。これはゼータに対してオイラーマクローリンの和公式を用いると  $\zeta(-3)$

$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^N n^3 - \left( \frac{N^4}{4} + \frac{N^3}{2} + \frac{N^2}{4} \right) + \frac{1}{120} \right\} = \frac{1}{120}$  … (4) という繰り込みの

形の解釈ができることに類似している。」この (4) はきわめて大事な等式である。あとでまた本格

的に取り上げるが、いまはこの (4) が  $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 = \frac{1}{120}$  とはしていないということの証左であると

いうことだけ確認しておこう。それはまた (3) の “ $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 - \infty$ ” が、「繰り込み」であるという

説明からも言える。繰り込みである、ということはすなわち  $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$  を直接に  $\frac{1}{120}$  に置き換えてはいないということが前提なのである。にもかかわらず読んだ側に誤解が生じるのはいったい何故であろうか。それは、著者のスタンスが、誤解を与えないようにしなければいけない、というより誤解されても構わない、というスタンスにあるからだと思う。現に P20 には  $\zeta(-3) = \sum_{n=1}^{\infty} n^3$  とな  
もなく書かれていることから明白である。  
んのカッコ

⑤ところで、「絶対カシミール元」の付録にカシミールの原論文が載っているので引用する。

「完全な伝道壁で囲まれた体積  $L^3$  の立方体の空洞を考え、1 辺の長さが  $L$  の正方形の金属板を  $x y$  平面と平行に配置する。そこでの金属板が  $x y$  平面から小さい距離  $a$  にある状況と、非常に大きい距離（たとえば  $\frac{L}{2}$ ）にある 2 つの状況を比較しよう。どちらの場合も表示式  $\frac{1}{2} \sum A_w$  は発散していてそのままでは物理的意味が欠落している。しかし 2 つの状況を比較して、その差  $(\frac{1}{2} \sum A_w)_I - (\frac{1}{2} \sum A_w)_{II}$  を考えるとこれは well-defined な値をとることがわかり、結局それは金

属板と  $x y$  平面の間の相互作用として解釈される」 そのあと簡単に言えば “ $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 - \int_0^{\infty} w_k dw$ ” をオイラーマクローリンの和公式を使って計算し数値を求めている。このカシミールの論文の中に数学上不思議なところは何もないかのように見える。もちろん  $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 = \frac{1}{120}$  としているわけでもなく、

また、 $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$  の繰り込み値は  $\zeta(-3)$  だからといって “ $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 - \int_0^{\infty} w_k dw$ ” =  $\zeta(-3)$  だとしているわけでもない。ただオイラーマクローリンの和公式を用いて、

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(n) - \int_0^{\infty} g(x) dx = -\frac{1}{2} g(0) - \frac{1}{12} g'(0) + \frac{1}{24 \times 30} g'''(0) + \dots \quad (5) \quad \text{となるよ}$$

うな  $g(n)$  に持ち込んで普通に計算している。(5) の右辺で残るのは  $g'''(0)$  だけであとは 0 である。そしてその  $g'''(0)$  の係数が実は  $-\frac{B_4}{4!}$  なのだ。その  $-\frac{B_4}{4!}$  は、イコール  $\frac{\zeta(4)}{8\pi^4}$  であり、さらにまたイコール  $\frac{\zeta(-3)}{3!}$  なのである！つまりここに  $\zeta(4)$  が出てきて、したがって  $\zeta(-3)$  が出てきた

わけである。だから数学者にしてみれば、 $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$  から  $\zeta(-3)$  が出てきたことにがぜん注目が集まっ

たのだと思われる。確かに注目すべきことではある。しかしそこから、「数論 2」のようなコメント、  

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \cdots = \frac{1}{120} \cdots \cdots$$
 なお上記のような発散級数の値を自然が零点振動・真空エネルギーとして計算していることが最近確認されている」とまで言ってしまったらだれもが  

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3$$
 を  $\frac{1}{120}$  に置き換えたと思うのは間違いないであろう。

〔Ⅱ〕繰り込み理論のカラクリ。問題点ならびにその解決のための方向について。

⑥ まあそれはさておき、先に「カシミールの論文の中に数学上不思議なところは何もないかのように見える。」と書いたが実は、**数学上、重大な問題箇所があるのである。**

それは 
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 - \int_0^{\infty} x^3 dx \quad \cdots (6)$$
 を計算する段になってカシミールはそれぞれにある関

数  $f(x)$  をかけているところである。つまり、
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 f(n) - \int_0^{\infty} x^3 f(x) dx \quad \cdots (7)$$
 に変形しているの

である。なぜなら (6) のままでは発散は消えないからだ。本の中で著者は「 $\sum_1^{\infty} n^3 - \infty$ 」というように考えて  $\sum_1^{\infty} n^3$  の発散を消す繰り込み理論」と説明しているけれど実はそれでも発散は消えないのである。発散が消えない理由は簡単だ。

$$\sum_{n=1}^N n^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} = \frac{N^4}{4} + \frac{N^3}{2} + \frac{N^2}{4}$$
 であるのに

$$\int_0^N x^3 dx = \frac{N^4}{4}$$
 だから引いても  $\frac{N^3}{2} + \frac{N^2}{4}$  が残るからである。次に、かける  $f(x)$  だがこれは  $x=0$

の付近では  $f(x)=1$ 、 $x \rightarrow \infty$  の方では例えば  $f(x) = \frac{1}{x^4}$  のような、要するに  $x^3 f(x) \rightarrow 0$  となるように指定された関数である。

$g(x) = x^3 f(x)$  とすると、 $x=0$  の付近では  $g(x) = x^3$  で、 $x \rightarrow \infty$  では  $g(x) \rightarrow 0$  である。まず本来のオイラーマクローリンの和公式を  $g(x)$  について書く。

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N g(n) - \int_0^N g(x) dx &= \frac{1}{2} \{g(N) - g(0)\} + \frac{B_2}{2!} \{g'(N) - g'(0)\} + \frac{B_4}{4!} \{g^{(3)}(N) - g^{(3)}(0)\} \\ &+ \frac{B_6}{6!} \{g^{(5)}(N) - g^{(5)}(0)\} + \cdots \end{aligned} \quad (8) \quad (B_2, B_4, B_6 \text{ はベルヌーイ数})$$

$N \rightarrow \infty$  にすると  $g(N) \rightarrow 0$ 、 $g'(N) \rightarrow 0$ 、 $g^{(3)}(N) \rightarrow 0$  となって前の (5) 式になる。

そして  $g(0)=0$ 、 $g'(0)=0$ 、 $g^{(3)}(0)=6$ 、 $g^{(5)}(0)=\dots=0$ 、つまり  $g^{(3)}(0)$  のみ定数 6 で

ほかは 0 であるから、結局、 $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 f(n) - \int_0^{\infty} x^3 f(x) dx = \frac{1}{120}$  … (9) となる。よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 - \int_0^{\infty} x^3 dx = \frac{1}{120} \quad \dots (10) \quad \text{としているのである。ここ}$$

が問題の箇所である。 $f(x)$  をかけて (9) まで導いたのは OK だ。その (9) からどうして (10) がいえるのか。それは絶対いえない。それにもかかわらず、カシミール力は実験で検証され、その数値の正しさも検証されているのである。つまり (10) が正しいということになっているのだ。さあ、新たな謎がここにあるということである。

⑦問題をはっきりさせるために、仮に、 $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 - \int_0^{\infty} x^3 dx$  が数学的に何の問題もなく、発散

が消えて  $\frac{1}{120}$  が求まったとしてみよう。そのときには、それを繰り込み理論であるなどという必要

は全くないのである。なぜなら、 $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 - \int_0^{\infty} x^3 dx$  の物理的意味が、{ I のエネルギー } — { II のエネ

ルギー } としてちゃんと意味づけられているのだから、それは物理的にも数学的にも何の問題もない理論なのだ。発散を解消するために、なんらかのテクニックすなわち繰り込み理論をつかったわけではないのである。勿論それは仮の話、現実には数学的大問題ありの、しかし正しい有限数値を求めた理論だからやはり繰り込み理論ではある。しかし**この繰り込み理論の核心、発散を消す核心は、「f**

**(x)をかけること」にある**。著者のいう「 $\sum_1^{\infty} n^3 - \infty$ 」というように考えて  $\sum_1^{\infty} n^3$  の発散を消す繰り込み理論」というのは正しくはない。それゆえ、**なぜ「f(x)をかけること」によって正しい数値が求まるのか？**これが謎解きの次のテーマになるのである。

⑧しかしその前に、「絶対カシミール元」の中でも同じように数学的におかしい箇所があることを指摘しておこう。カシミールと違って著者はプラナの和公式を使ってエネルギー値を求めている。p 30 で、公式を紹介したうえで証明を与えている。引用する。

「定理 2. 2 (プラナの和公式)  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$  で正則な関数  $f(z)$  を考える。 $f(z)$  は  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$  で  $|z| \rightarrow \infty$  とするとき、 $|z|^2 |f(z)| \rightarrow 0$  となるものとする。このとき次が成立する。

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_0^{\infty} f(x) dx - \frac{1}{2} f(0) + i \int_0^{\infty} \frac{f(ix) - f(-ix)}{e^{2\pi x} - 1} dx \quad ]$$

それを証明したあと右辺の第1項の  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  を左辺に移項している。「上のプラナの和公

式の中では、 $f(z)$ の増大度（無限遠方で早く消えること）を要請したが、 $\infty$ の繰り込みという観

点からは、このように  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  を左辺にもってゆき  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  からでる発散を  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  のそれから相

殺してしまう手続きこそが重要なのである。実際、右辺に残った積分は分母に指数関数があるので、 $f(x)$ が多項式程度の増大度であれば問題なく収束するからである。」と述べていて、そのあと  $f(z) = z^3$  にプラナの和公式を適用して、カシミールエネルギーの値を求めているのである。しかし

ここにはおわかりと思うが重大な問題がある。 $f(z) = z^3$  では、公式適用の条件である  $|z| \rightarrow \infty$  のと

き  $|z|^2 |f(z)| \rightarrow 0$  がいえないのである。条件外のものに定理を適用することなど絶対にできない。そ

れはイロハである。条件外の適用だが、右辺の積分が収束するから発散を解消する観点からはOKだなんて、そんな問題ではないのである。ところが、ところがだ。 $f(z) = z^3$  にプラナの和公式を

むりやり適用して計算してみると  $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 - \int_0^{\infty} x^3 dx = \frac{2}{(2\pi)^4} \zeta(4) \Gamma(4) = -\frac{B_4}{4} = \frac{1}{120}$  ( $= \zeta(-$

3)) となるのである。

しかしこれは明らかな間違いである。左辺は、もちろん、 $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{N^2(N+1)^2}{4} - \frac{N^4}{4} \right\}$  と考えるわけだ

が発散は消えない。確かに正しい数値が求まるがそれは、 $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{N^3}{2} + \frac{N^2}{4} \right\} = \frac{1}{120}$  ということをや

っているわけだから数学的にはだめである。そういう数学的大問題ありの、繰り込み理論の核心、発散を消す核心はこちらでは**条件外のプラナの和公式のむりやり適用**ということとなった。

⑨カシミールの論文ならびに「絶対カシミール元」の両者に共通しているのは、数学的には間違いと言うべき実にトリッキーな方法を使って、しかし正しい数値を求めているということである。物理学的にはそれでもいいかもしれない。カシミール力の存在を予言し、その正しい数値まで求めたカシミールの業績は偉大であると私も思う。しかし、それでも、謎解きの観点からは、**なぜ数学的にはトリッキーな方法で正しい数値が求まるのか**、そのカラクリを明らかにしたいと思うし、それは絶対必要だとも思うのである。そのカラクリを明かすために少し準備する。まず、オイラー

マクローリンの和公式。Nは自然数、 $f(x)$ は $[0, N]$ で何回でも微分可能なとき、

$$\sum_{n=1}^N f(n) - \int_0^N f(x)dx = \frac{1}{2}\{f(N) - f(0)\} + \frac{B_2}{2!}\{f'(N) - f'(0)\} + \frac{B_4}{4!}\{f^{(3)}(N) - f^{(3)}(0)\} + \frac{B_6}{6!}\{f^{(5)}(N) - f^{(5)}(0)\} + \dots \quad (11)$$

$$\int_0^N f(x)dx = F(N) - F(0) \text{ だから、 } S_f(x) = F(x) + \frac{1}{2}f(x) + \frac{B_2}{2!}f'(x) + \frac{B_4}{4!}f^{(3)}(x) + \dots$$

とすれば  $\sum_{n=1}^N f(n) = S_f(N) - S_f(0) \quad \dots (12)$  と書ける。また、 $\bar{S}_f(x) = S_f(x) - F(x)$  と

すれば  $\sum_{n=1}^N f(n) - \int_0^N f(x)dx = \bar{S}_f(N) - \bar{S}_f(0) \quad \dots (13)$  である [(12)、(13) のように分離

できないような場合もあるかもしれないが  $f(x) = x^s$  レベルのものなら全く問題ない。]

さて、 $f(x) = x^{s-1}$  ( $s$  は自然数) のとき、

$$\sum_{x=1}^N x^{s-1} = \frac{1}{s}B_s(N) - \frac{1}{s}B_s(0) \quad \dots (14) \text{ は有名である。ただし } B_s(0) \text{ はイコール、ベ}$$

ルヌーイ数  $B_s$  であり、 $B_s(x)$  はベルヌーイ多項式で、その定義は  $B_s(x) = \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} B_i x^{s-i}$  である。

例えば、 $B_2(x) = B_0 x^2 + 2B_1 x + B_2 = x^2 - x + \frac{1}{6}$   $B_4(x) = B_0 x^4 + 4B_1 x^3 + 6B_2 x^2 + 4B_3 x + B_4$

$= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$  である。(12) と (14) から、 $f(x) = x^{s-1}$  のとき、当然  $S_f(N) = \frac{1}{s}B_s(N)$ 、

$S_f(0) = \frac{1}{s}B_s(0) = \frac{1}{s}B_s$  ということになる。

これからは  $f(x) = x^3$  として、カシミールの場合を考えるので、混乱しないように、かけるものを前と違って  $p(x)$  に変更する。そして  $g(x) = x^3 p(x)$  とする。 $p(x)$  とはどのようなものであったか。 $x=0$  の付近では  $p(x) = 1$  よって  $g(x) = x^3$ 、 $x \rightarrow \infty$  ではたとえば  $p(x) = \frac{1}{x^4}$  よって  $g(x) = \frac{1}{x}$  となるような関数であった。(13) をもう 1 度書く。

$$\sum_{n=1}^N f(n) - \int_0^N f(x)dx = \bar{S}_f(N) - \bar{S}_f(0) \quad \dots (13) \text{ であつた。} \quad \text{そしてもちろん}$$

$$\sum_{n=1}^N g(n) - \int_0^N g(x)dx = \bar{S}_g(N) - \bar{S}_g(0) \quad \dots (15) \text{ である。ここで } \bar{S}_f(0) = \bar{S}_g(0) \text{ であることは明ら}$$

か、なぜなら  $x=0$  の付近では  $f(x)=g(x)=x^3$  なのだから。そして  $N \rightarrow \infty$  で、 $\bar{S}_g(N) \rightarrow 0$  であることも容易にわかる。まあ言ってみればカシミールはそうなるように  $p(x)$  を作ったということだ。

そうして、
$$\sum_{n=1}^{\infty} g(n) - \int_0^{\infty} g(x) dx = -\bar{S}_g(0) = \frac{1}{120}$$
 となつてめでたく有限値がとりだせ

たというわけである。(13)において、 $N \rightarrow \infty$  で本当は  $\bar{S}_f(N) \rightarrow \infty$  なのだが、そこをむりやり

$\bar{S}_f(N) \rightarrow 0$  にしてしまえば 
$$\sum_{n=1}^N f(n) - \int_0^N f(x) dx = -\bar{S}_f(0) = -\bar{S}_g(0) = \frac{1}{120}$$
 となつて、(10) の

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 - \int_0^{\infty} x^3 dx = \frac{1}{120}$$
 が求まったことになる。(12) の  $\sum_{n=1}^N f(n) = S_f(N) - S_f(0)$  で考えよう。

$S_f(0) = \bar{S}_f(0)$  である。 $N \rightarrow \infty$  で本当は  $S_f(N) \rightarrow \infty$  であるがそこをむりやり  $S_f(N) \rightarrow 0$  にしてしま

えば 
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = -S_f(0) = \frac{1}{120}$$
 すなわち 
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 = \frac{1}{120} = \zeta(-3)$$
 が求まったというわけだ。これがカラクリである。

次に「絶対カシミール元」の方も検討しよう。 $f(x)=x^3$  だから 
$$\sum_{n=1}^N f(n) - \int_0^N f(x) dx =$$

$\bar{S}_f(N) - \bar{S}_f(0)$  で  $N \rightarrow \infty$  で本当は  $\bar{S}_f(N) \rightarrow \infty$  だが、ここで  $f(x)=x^3$  にむりやりプラナの和公式

を適用するとなんと、
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \int_0^{\infty} f(x) dx = -\bar{S}_f(0)$$
 となってしまうのである。つまり

$\bar{S}_f(N) \rightarrow 0$  にしたのと同じこと。ということは、むりやりプラナの和公式を適用するということがむり

やり  $\bar{S}_f(N) \rightarrow 0$  にしてしまうことと同じだということである。むりやり  $\bar{S}_f(N) \rightarrow 0$  にしてしまえば

$$-\frac{1}{2} f(0) + i \int_0^{\infty} \frac{f(ix) - f(-ix)}{e^{2\pi x} - 1} dx = -\bar{S}_f(0)$$
 になるのだ。これは、オイラーマクローリン

の和公式とはちがう  $-\bar{S}_f(0)$  の計算式だということになる。さらに、むりやり  $S_f(N) \rightarrow 0$  にしてしま

えば 
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = -S_f(0) = \frac{1}{120}$$
 すなわち 
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 = \frac{1}{120} = \zeta(-3)$$
 が求まることも簡単にいえてカシ

ミールの場合と同じであることがわかる。要するに、外見は違うが、 $N \rightarrow \infty$ で本当は発散する  $S_f(N)$  をむりやり  $S_f(N) \rightarrow 0$  にしてしまっって  $-S_f(0)$  を求めるというのが共通のカラクリだということである。この「むりやり」というのはどのような論理をこねくり回そうが絶対に消すことはできない。数学的には、絶対正当化することはできない。正しい数値を求めるそのカラクリはわかったが、あくまでカラクリであって数学的根拠とはいえない。

いま、無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  を  $-S_f(0)$  に移す写像  $T$  を考えてみよう。それは明らかに総和法である。本来ならオイラーマクローリン総和法とでも呼ぶべきかもしれないが今は仮に  $T$  総和法と呼ぶことにする。この  $T$  総和法は、カシミールパターンの繰り込み理論の数学モデルということになる。要するに、カシミールパターンの繰り込み理論とは  $T$  総和法なのだ。そして繰り込み値とは  $T$  和のことだといってよい。だからといってなにか数学的根拠が明らかになったというわけでは全然ない。ただこの  $T$  総和法について考察してみると色々面白いことが出てくるので、それはそれであとで述べることにする。

⑩カシミールパターンの繰り込み理論についての以上の考察からどういう結論を導き出すべきであろうか？（以下単に繰り込み理論といえばカシミールパターンの繰り込み理論のことをさす。）

繰り込み理論にはらまれる数学上の大問題、そんなのは物理学上たいした問題ではない、正しい数値が求まればそれで OK，という立場もありうるだろう。しかし私は、それは間違っていると思う。はっきりいって、繰り込み理論は理論の本来のあり方からすれば歪んだ理論であるといつてよい。そこで、その歪みを無くすための方向を考えてみたい。

### 第1の方向。物理的意味の補正・変革。

カシミールは  $\{I \text{ のエネルギー} \} - \{II \text{ のエネルギー} \}$  としてカシミールエネルギーを求めている。そして  $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 - \int_0^{\infty} x^3 dx$  を計算し、それでも残る発散をムリヤリ消して  $-\bar{S}_f(0)$  を求めた。

本当は  $\sum_{n=1}^N n^3 - \int_0^N x^3 dx = \bar{S}_f(N) - \bar{S}_f(0)$  だったのだから、 $\lim_{N \rightarrow \infty} \{ \sum_{n=1}^N n^3 - \int_0^N x^3 dx - \bar{S}_f(N) \} (=$

と (−3)) に物理的意味があつてそれこそがカシミールエネルギーだということになればそれが一番スッキリした解決になる。つまり  $\bar{S}_f(N)$  に対応した  $\{III \text{ のエネルギー} \}$  が考えられるならば万事めでたく解決である。謎解きも完全に終了である。そのときにはと (−3) は繰り込み値などという訳のわからない扱いから解き放たれ、カシミールエネルギーをあらわす物理量というまっとうな扱いを受けることになる。それはまた、 $\sum_{n=1}^N n^3 = S_f(N) - S_f(0)$  であるから、 $\lim_{N \rightarrow \infty} \{ \sum_{n=1}^N n^3 - S_f(N) \}$

すなわち、 $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^N n^3 - \frac{B_4(N)}{4} \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^N n^3 - \left( \frac{N^4}{4} + \frac{N^3}{2} + \frac{N^2}{4} - \frac{1}{120} \right) \right\}$  にカシミールエネルギーとしての物理的意味があるのかどうかということとなる。そういうことであって欲しい、とは思ふものの私の手には負えない。どうかこの点、物理研究者の方々に心から検討をお願いしたい。(ところで、 $\sum_{n=1}^N n^3 = S_f(N) - S_f(0)$  したがって  $\sum_{n=1}^N n^3 - S_f(N) = -S_f(0)$  は  $N$  についての恒等式だから、 $\lim_{N \rightarrow \infty}$  といってもはじめから  $-S_f(0) = \zeta(-3)$  のままであってどんどん近づく収束ということではないことに注意。)

## 第2の方向。数学的変革。

もちろん、物理の側からどう検討しても {Ⅰのエネルギー} - {Ⅱのエネルギー} すなわ

ち  $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 - \int_0^{\infty} x^3 dx$  以外に考えられないということも十分ありうる。その時は今度はボールは数学に

返される。現象の数学的記述についての根本的な変革が求められる。具体的には見当もつかないが、積分の基本から再検討が必要になるであろう。しかしその前にまずは物理の側からの検討が先だと思う。その検討のうえで、さらに物理と数学とのお互いの“歩み寄り”ということもありえるであろう。

## 【Ⅲ】解析接続の本当の威力

⑪以上で新たな謎解きは基本的に終了である。基本的に、というのは⑩で述べた検討を待たないと完全な終了とはならないからだ。しかしである。その検討を待たなくても解明される或る謎について述べていきたい。それは、⑨で、 $-S_f(0)$  の求め方のカラクリを明らかにしたこと

から派生する謎である。 $N \rightarrow \infty$  で本当は発散する  $S_f(N)$  をむりやり  $S_f(N) \rightarrow 0$  にしてしまっ

て **を求めるというのが共通のカラクリだ** ということであつた。しかし、発散を消す方法はそれに限られる

だろうか？そもそも  $S_f(N) = -\frac{B_4(N)}{4} = \frac{N^4}{4} + \frac{N^3}{2} + \frac{N^2}{4} - \frac{1}{120}$  をよく見て欲しい。 $S_f(N) \rightarrow$

0 にしてしまうということは  $\frac{N^4}{4} + \frac{N^3}{2} + \frac{N^2}{4} - \frac{1}{120} \rightarrow 0$  ということになるが発散を消すという

観点からだったら  $N$  を 0 にしてしまえというほうがよほどわかりやすい。なんで  $-\frac{1}{120}$  も含めて  $\rightarrow$

0 なんだろうか、不思議でならない。 $S_f(N) \rightarrow 0$  以外に例えば  $S_f(N) \rightarrow 1$  だって発散は消えて、

その時は  $1 - S_f(0)$  という有限値がとりだされるのだ。 $C$  を実数値として、 $S_f(N) \rightarrow C$  だってい

いわけである。発散を消す、という観点からはみな対等である。ならば、とりだされる有限値は  $-S_f(0)$  以外にたくさんありうるのではないかと **第1の方向**での検討の結果、 $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^N n^3 - \left( \frac{N^4}{4} + \frac{N^3}{2} + \frac{N^2}{4} - \frac{1}{120} \right) \right\}$  にカシミールエネルギーとしての物理的意味があるということにもしもなったら、そういうことは問題にもならない。 $-S_f(0)$  以外にありえない、それで決まりである。しかし、その検討を待たずに、 $-S_f(0)$  以外にないという結論が数学からは確定しているといえるのである。それはなぜか、という謎を解く鍵は解析接続にある、と私は思う。ということで、解析接続について学習したことの基本的なポイントを述べたい。1 番簡単な例で考えてゆこう。

⑫複素関数  $f_0(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + 6$  は  $|z| < 1$  すなわち原点を中心として収束半径 1 の円内 ( $D_0$ ) で定義されている。ところで  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  を考えると  $|z| < 1$  では  $f_0(z) = f(z)$  である。ここで Part2 でも書いた「一致の定理」をもう一度書く。

定理「領域  $K$  において  $f(z)$ 、 $g(z)$  は正則で、 $K$  内の小領域  $K_0$  においては  $f(z) = g(z)$  とする。然らば  $K$  において常に  $f(z) = g(z)$ 」

さて、いま  $f_0(z)$  を全複素平面 ( $z \neq 1$ ) に解析接続しようとするなら全複素平面 ( $z \neq 1$ ) に定義域を拡張しようとする、それは  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  以外にはありえないということ。それはこの「一致の定理」から簡単に導かれる。これが**解析接続の一意性**である。(解析接続は、 $f_0(z)$  から始まって収束円  $D_0$  をはみだして収束円  $D_1$  で定義される  $f_1(z)$  さらに  $f_2(z)$  とどんどん拡張してゆくものとしてまず習うけれど、ここでは省略して全平面への解析接続だけ考える。) 何だそんなこと、当たり前ではないかと思われそうだが実はそうではない。実関数では全然違うのだ。例えば実関数  $f_0(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + 6$  ( $|x| < 1$ ) を全実数範囲 ( $x \neq 1$ ) に拡張しようとしても(微分可能性の保存を要請しても) いろいろなつなぎ方、いろいろな拡張のしかたがありえて自由なのである。ところが複素平面で正則性を要請すると拡張は段違いに厳しくなるそれはただ 1 つに限られるということである。

ここで**基本的確認**。 $f_0(z)$  を解析接続して  $f(z)$  になったからといって、全複素平面 ( $z \neq 1$ ) でも  $f_0(z) = f(z)$  だとしてはいけないということ。前の「一致の定理」からいえると思われそうなので要注意だ。 $K$  を全複素平面 ( $z \neq 1$ )、 $K$  内の小領域  $K_0$  を  $D_0$  としたとき、「一致の定理」から、 $K_0$  で  $f_0(z) = f(z)$  ゆえに  $K$  でも常に  $f_0(z) = f(z)$ 。しかしこれは間違い。 $K$  では  $f_0(z)$  は正則ではないのだ! 「一致の定理」からいえるのは、 $f_0(z)$  を  $K$  に解析接続すると、それは  $f(z)$  以外にない、そういう**解析接続の一意性**ということ。もし別に  $f(z)$  と異なる  $g(z)$  (もちろ

んKで正則、 $K_0$ で $f_0(z) = g(z)$ が存在するとすれば「一致の定理」によって直ちに矛盾となる。

だから、 $f_0(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + 6$ を全複素平面( $z \neq 1$ )に解析接続して $f(z) = \frac{1}{1-z}$ になっ

たからといって、全複素平面( $z \neq 1$ )でも $1 + z + z^2 + z^3 + 6 = \frac{1}{1-z}$ ではないのである。例え

ば $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 6 = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$ としてはいけないということである。もちろんこのことは数学

研究者においては常識であろう。ところが、ゼータの世界ではそれが罷り通っているのである。

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{は } \operatorname{Re}(s) > 1 \text{ で収束でその範囲で定義されているが、} \zeta(s) \text{を}$$

変形してゆくと $\frac{1}{s-1}$ +整関数の形となって、いっきに全複素平面( $s \neq 1$ )に解析接続されて、た

とえば

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12} \text{ がもとまると、} 1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12} \text{ ということが大っぴらにまかり通ってしまうの}$$

である。解析接続を根拠として。それはなぜか？

第1の理由。オイラー・杉岡パターンで、 $\phi(-1) = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots$ がもろにでてきた  
ときにそれを $\frac{1}{4}$ に置き換えてOKだからである。根拠はアーベル総和法だった。その時 $1 + 2 + 3 + \cdots$ がもろに出てきたらアウト、アーベル和が $\infty$ だからである。ところがである。ゼータの世界では、解析接続で求まった $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ から簡単に $\phi(-1) = \frac{1}{4}$ が求まる転換式があるのだ。この特殊事情が第2の理由である。

すなわち、 $\phi(-s) = (1 - 2^{1+s})\zeta(-s) \quad \cdots (16)$ ここから転倒が起きる。まず解析接続で $\zeta(-s)$ が求まる。どんな本でも $\zeta(-s)$ の数値が載っている。それから(16)で $\phi(-s)$ を求める。オイラー・杉岡パターンで $\phi(-s)$ の威力、アーベル和の威力をまのあたりにして、それを $\zeta(-s)$ の威力、解析接続の威力、と勘違いしてしまうのである。

少し話が脇にそれた。 $\operatorname{Re}(s) > 1$ の範囲で定義されている $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ を全複素平面( $s \neq 1$ )に解析接続するとそれはただ1つに限られるという**解析接続の一意性**、それこそ $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$ に関わ

る計算から $-S_f(0) = \frac{1}{120}$ だけしか出てこないことの根拠であると思うのである。もちろんちゃんとした証明というのではなく、はなはだ直感的である。そこでまた別の面から補強してゆこう。

$$\textcircled{13} f(x) = x^{s-1} \quad (s \text{ は自然数}) \text{ のとき、} \sum_{x=1}^N x^{s-1} = \frac{1}{s} B_s(N) - \frac{1}{s} B_s(0) \quad \cdots (14) \text{ であつた。}$$

実は  $s$ 、 $N$  を自然数として  $\sum_{x=1}^N \frac{1}{x^s} = -\zeta(s, N+1) + \zeta(s, 1) \cdots (17)$  というのがある。 $s$  乗数の

和の公式で正べきは (14) で、ベルヌーイ多項式、負べきは (17) で、フルビッツ  $\zeta$  関数が出てく

る。フルビッツ  $\zeta$  関数の定義は、 $\zeta(s, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^s} \cdots (18)$  である。

もちろん、 $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$ 、 $B_s(0) = B_s$  である。

$\zeta(s, x)$  や  $\zeta(s)$  で  $s$  を負整数に拡張しようとするれば

$$\zeta(s, x+1) = -\frac{1}{s} B_s(x) \cdots (19) \quad \zeta(s) = -\frac{1}{s} B_s \cdots (20) \text{ としたくなるのはき}$$

わめて自然であろう。(岩波「数論 1」にもそう書いてある) 現に解析接続でそのように求まっているのである。ということは解析接続は (17) の和公式を保存しているといえる。あるいは、(17) の和公式の保存を要請すると (19) (20) 以外にありえないということのようである。そういう点でも、

$\sum_{n=1}^{\infty} n^3$  に関わる計算から  $-\frac{B_4}{4} = \frac{1}{120}$  だけしか出てこない、といえそうである。

#### 【IV】 T 総和法と $\zeta^*(s)$ について

⑭ ⑨の終わりで述べた T 総和法について。  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  を  $-S_f(0)$  に移す写像 T のこと。

もちろんそれはアーベル総和法より強い。それでは T 総和法はパーマネントだろうか？パーマネン

トとは無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  が  $u$  に収束するならば T 総和法でも  $T - \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u$  であることをいうのであ

った。発散級数  $\sum_{n=1}^{\infty} n^s$  を総和可能にする総和法は T 総和法以外にもゴロゴロある。例えば第 N 項で

打ち切ってしまう  $\sum_{n=1}^{\infty} n^s \rightarrow \sum_{n=1}^N n^s$  なる総和法は  $\sum_{n=1}^{\infty} n^s$  を総和可能にする総和法であるが、あきらか

にパーマネントではない。やはり総和法はパーマネントであることが強烈に求められると思う。で、この T 総和法である。私は Part 1 で  $1 + 2 + 3 + \cdots$  を総和可能にする総和法は絶対パーマネントではないだろう、と書いた。そこで、簡単な例で調べてみた。

$a$  も  $x$  も実数として、 $f(x) = a^x$  とする。  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = a + a^2 + a^3 + 6$  である。

$-S_f(0)$  を計算する。 $S_f(x) = \frac{B_0}{0!} F(x) - \frac{B_1}{1!} f(x) + \frac{B_2}{2!} f'(x) + \frac{B_4}{4!} f^{(3)}(x) + \cdots$  であった。

$$f^{(n)}(x) = a^x (\log a)^n \quad , \quad F(x) = \frac{a^x}{\log a} \quad \text{より} \quad f^{(n)}(0) = (\log a)^n, \quad F(0) = \frac{1}{\log a}$$

$$\text{ゆえに } S_f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (\log a)^{n-1} + f(0) \ast = \frac{1}{\log a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (\log a)^n + f(0) =$$

$$\frac{1}{\log a} \frac{\log a}{e^{\log a} - 1} + 1 = \frac{1}{a-1} + 1 = \frac{a}{a-1} \quad \therefore -S_f(0) = \frac{a}{1-a} \quad \cdots (21)$$

※の+  $f(0)$  について、 $B_1$  のところだけマイナスなので補正した。

また  $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$  をつかった。(ベルヌーイ数の定義でもある)

(21)の結論は、 $a \neq 1$  以外  $a$  はなんでもOKである。ということは、 $|a| > 1$  の発

散級数のときはT和であり、 $|a| < 1$  のときは無限級数の収束和に等しいことを示している。要するにパーマネントの可能性が高いように思われる。

⑤ T総和法がもしパーマネントだとすると、 $f(x) = \frac{1}{x^s}$  として  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  についてのT和を考えてみたくなるのは当然だろう。なぜならパーマネントならば、収束する  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$  なのだから、 $T \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$  になるはずだからである。そこで  $T \cdot \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = -S_f(0)$  を求めてみた。ただしそのためには  $f(x) = \frac{1}{(1+x)^s}$  としておく。そうして求められたものは次のようなものであった。

$$-S_f(0) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} p_n(s) \quad \cdots (22)$$

ただし  $p_n(s) = (-1)^n s(s+1)(s+2) \cdots (s+n-2) \quad (n=2, 3, \cdots)$  じつは

$f(x) = \frac{1}{(1+x)^s}$  としたために  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  は  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$  より1だけ少なくなる。そこで(22)を補

正して  $T \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = -S_f(0) + 1 = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} p_n(s) \quad \cdots (23)$  となる。

$$p_0(s) = \frac{1}{s-1} \quad p_1(s) = -1 \text{ とすれば (23) は } T \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} p_n(s) \text{ となる。}$$

$B_3, B_5, B_7 \cdots$  はすべて0だから、実際に出てくるのは  $B_{2n}, p_{2n}(s)$  だけである。そこで、

$$T \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} p_{2n}(s) \quad \cdots (24) \text{ とした方がわかりやすい。}$$

$p_{2n}(s) = s(s+1)(s+2) \cdots (s+2n-2) \quad (n=1, 2, \cdots)$  もっと具体的に書くと

$$T \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \frac{B_2}{2!} s + \frac{B_4}{4!} s(s+1)(s+2) + \frac{B_6}{6!} s(s+1)(s+2)(s+3)(s+4) + \cdots$$

である。さてこの  $T \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  をさしあたり、 $\zeta^*(s)$  で表わすことにしよう。ゼータスターと呼ぶことにする。この  $\zeta^*(s)$ 、 $s > 1$  ではなんと発散してしまうのである。では  $s < 1$  では収束か？という、これもほとんどで発散なのである。そんな話にならないではないか、と思われそうだが、これが不思議なことに、 $\zeta^*(s)$  は、 $s = 0$  ならびに、すべての負整数でのみ値をもち、そのときだけ  $\zeta^*(s)$  は  $\zeta(s)$  に一致するのだ。それでは  $\zeta^*(s)$  は  $s$  を 0 または自然数として、 $T \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^s$  すなわち  $\zeta(-s)$  と同じではないか。その通りなのである。求めてみればわかるが、要するに (23) 式で  $s$  を  $-s$  に代えただけの式になる。形としては全く変わらないのである。これは一体どういうことだろうか？

まず  $T$  総和法がパーマネントではないことがはっきりした。でも本当にそうなのか？というのは、オイラーマクローリンの和公式 (11) は、常に成り立つとは限らないことに注意とあって、しかしその問題は次の定理のように (11) の右辺を有限個で打ち切り剰余項を考えることによって解決されるとあるのである。

定理「 $N$  と  $k$  は任意の自然数、 $f$  は  $[0, N]$  で  $k$  回微分可能な関数とすれば、

$$\sum_{n=1}^N f(n) = \int_0^N f(x) dx + \frac{1}{2} \{f(N) - f(0)\} + \sum_{j=2}^k \frac{B_j}{j!} \{f^{(j-1)}(N) - f^{(j-1)}(0)\} + \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^N \tilde{B}_k(x) f^{(k)}(x) dx \quad \cdots (25)$$

ここで、 $\tilde{B}_k(x)$  は  $0 \leq x \leq 1$  では

$B_k(x)$ 、それ以外は周期 1 で拡張したものである。」

現時点で、この定理でどうなるのか私にはわからない。どなたか教えてほしい。

⑯  $s = 0$  ならびに、すべての負整数でのみ値をもち、そのときだけ  $\zeta(s)$  に一致するという

$$\zeta^*(s) \text{ はやはりとても興味深い。 } \zeta^*(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} p_{2n}(s) \quad \cdots (24)$$

$$p_{2n}(s) = s(s+1)(s+2) \cdots (s+2n-2) \quad (n = 1, 2, \cdots) \text{ であった。ここで特に (24)}$$

の右辺の初項を第  $(-1)$  項、次を第 0 項とし、その次を第 1 項とすると、第  $n$  項は  $\frac{B_{2n}}{(2n)!} p_{2n}(s)$  す

なわち  $\frac{B_{2n}}{(2n)!} s(s+1) \cdots (s+2n-2)$  である。そして、第  $n$  項までの和を  $\zeta_n^*(s)$  とすると、

$$\zeta_1^*(s) = (s+2)(s+3)Q_1(s) \quad \zeta_2^*(s) = (s+2)(s+4)(s+5)Q_2(s)$$

$$\zeta_3^*(s) = (s+2)(s+4)(s+6)(s+7)Q_3(s)$$

$$\zeta_n^*(s) = (s+2)(s+4) \cdots (s+2n)(s+2n+1)Q_n(s) \quad \cdots (26) \text{ となる。ここで、}$$

$$Q_1(s) = \frac{B_2}{2!} \frac{1}{s-1} \quad Q_2(s) = \frac{B_4}{4!} \frac{s-9}{s-1} \quad Q_3(s) = \frac{B_6}{6!} \frac{s^2-10s+45}{s-1}$$

$$Q_n(s) = \frac{B_{2n}}{(2n)!} \frac{q_n(s)}{s-1} \quad \cdots (27) \text{ である。} \quad [q_n(s) \text{ は、} s \text{ の } (n-1) \text{ 次式}]$$

$\zeta^*(s)$  から  $\zeta_n^*(s)$  を引いた残りの式を  $\overline{\zeta_n^*(s)}$  とすると、

$$\overline{\zeta_n^*(s)} = \frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!} s(s+1)(s+2)6(s+2n) + s(s+1)(s+2)6(s+2n)(s+2n+1)R(s)$$

…(28)  $[R(s) \text{ は整式}]$  (24) (26) (28) から  $\zeta^*(0) = -\frac{1}{2}$   $\zeta^*(-2n) = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ )

$$\zeta^*(-2n-1) = -\frac{B_{2n+2}}{2n+2} \quad (n = 0, 1, \dots) \text{ であることは一目瞭然である。}$$

$$\zeta_n^*(s) - \zeta_{n-1}^*(s) = \frac{B_{2n}}{(2n)!} p_{2n}(s) \text{ であることから、} q_n(s) \text{ についての漸化式が求まる。}$$

$$q_n(s) = \frac{B_{2n-2}}{B_{2n}} \frac{2n(2n-1)(s+2n-1)}{(s+2n+1)(s+2n)} q_{n-1}(s) + \frac{(s-1)s(s+1)(s+3)(s+5)6(s+2n-3)}{(s+2n+1)(s+2n)} \cdots (29)$$

$$\text{右辺の第 2 項は } \frac{(s-1)s}{(s+2n+1)(s+2n)(s+2n-1)} \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)\cdots(s+2n)}{s(s+2)(s+4)(s+6)\cdots(s+2n)} \cdots (30) \text{ とも書ける。}$$

⑪ところで、岩波「数論 2」p 278 にリーマンが発見した  $\zeta(s)$  の次の式がでている。

$$\zeta(s) = \exp\left(\frac{\gamma + \log \pi}{2} s - \log 2\right) \frac{1}{s-1} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{2n}\right) e^{-\frac{s}{2n}} \cdots (31) \quad (\gamma =$$

0.577…はEuler定数であり、 $\rho$  は  $\zeta(s)$  の虚の零点全体を動く)

$$(26) \text{ の } \zeta_n^*(s) = (s+2)(s+4)6(s+2n)(s+2n+1) \frac{B_{2n}}{(2n)!} \frac{q_n(s)}{s-1} \text{ を眺めていると、} (31)$$

式との類似に驚かされる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n^*(s)$  はもちろん  $\zeta^*(s)$  だから、(31) の  $\zeta(s)$  と  $\zeta^*(s)$  とでは、どこがどう同じで、どこがどう違うのか当然調べてみたくなるというものだろう。そのために、次のガウスの公式が必要である。

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^s}{s(s+1)(s+2)(s+3)6(s+n)} \cdots (32) \quad \text{それと}$$

$$(29) \text{ で } s=0 \text{ を代入して得られる } q_n(0) = \frac{B_{2n-2}}{B_{2n}} \frac{(2n-1)^2}{(2n+1)} q_{n-1}(0) \text{ から}$$

$$q_n(0) = \frac{(2n)!}{B_{2n} n! 2^{n+1} (2n+1)} \cdots (33) \text{ が求められる。これで準備OKである。} \quad (32) \text{ から}$$

$$\frac{s}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{s}{2}}}{(1+\frac{s}{2})(1+\frac{s}{4})(1+\frac{s}{6}) \cdots (1+\frac{s}{2n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{s}{2}}}{\prod_{k=1}^n (1+\frac{s}{2k})} \cdots \quad (34)$$

また  $\overline{q_n}(s) = \frac{q_n(s)}{q_n(0)}$  とすると、

$$(26) \text{ の } \zeta_n^*(s) = 2^n n! \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{2k}\right) (s+2n+1) q_n(0) \overline{q_n}(s) \frac{B_{2n}}{(2n)!} \frac{1}{s-1} \quad (33) \text{ を}$$

代入  $\zeta_n^*(s) = \frac{(s+2n+1)}{2(s-1)(2n+1)} \overline{q_n}(s) \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{2k}\right)$  となる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n(0) = \prod_{\rho} \rho, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{q_n}(s) = \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \text{ だから、結局 } \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n^*(s) = \zeta^*(s) = \frac{1}{2(s-1)} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{2n}\right) \cdots (35) \text{ という事になった。}$$

$$(31) \text{ の } \zeta(s) = \exp\left(\frac{\gamma + \log \pi}{2} s - \log 2\right) \frac{1}{s-1} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{2n}\right) e^{-\frac{s}{2n}} \text{ と比べよう。}$$

$$(31) \text{ の } \zeta(s) = \frac{1}{2(s-1)} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{2k}\right)}{n^{\frac{s}{2}}} \pi^{\frac{s}{2}} = \frac{1}{s(s-1)} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \cdots (36)$$

完備リーマンゼータ関数  $\hat{\zeta}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$  であったから、 $\hat{\zeta}(s)$  とはすなわち  $\frac{1}{s(s-1)} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$  だということがわかった。完備リーマンゼータ関数  $\hat{\zeta}(s)$  は、 $\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s)$  という完全な対称の形になっている。だから、 $\prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) = \rho(s)$  と書くことにすれば、 $\rho(s) = \rho(1-s)$  で  $\rho(s)$ こそはリーマンゼータ関数の中心的な核であり、源泉であるというべきであろう。もちろん全ての非自明零点  $\rho$  の実部が  $\frac{1}{2}$  であるというかの世紀の大難問リーマン予想もこの  $\rho(s)$  に関してであることは今更言うまでもない。

$$\rho(s) \rightarrow \frac{\rho(s)}{s(s-1)} = \hat{\zeta}(s) \rightarrow \hat{\zeta}(s) \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \zeta^*(s) \rightarrow \zeta^*(s) \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{s}{2}}} = \zeta(s) \quad \text{正確な記}$$

述の仕方ではないが、わかりやすく  $\rho(s)$  から  $\zeta(s)$  への流れを書いてみた。(この流れからは  $\zeta^*(s)$ )

が、 $s < 0$  で収束するようにも見えるが、正しい書き方ではないからなんともよくわからない。）

$$\prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) = \rho(s) \leftrightarrow \zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \text{ この対応関係から、全ての非自明零点 } \rho \text{ と}$$

全ての素数  $p$  とが密接な関係にあることは容易にみてとれる。さて  $\zeta^*(s)$  は、 $\hat{\zeta}(s)$  と  $\zeta(s)$  との中間の形態であった。私としては  $\zeta^*(s)$  のおかげでゼータ関数の構造がよくわかった。なぜそれが T 総和法で出てきたのか、それは今後の謎解きになる。中途半端ではあるが面白い素材だと思うのでこの稿で発表することにした。

2010年7月11日記

杉本の連絡先 Eメール [sugimoto315@y9.dion.ne.jp](mailto:sugimoto315@y9.dion.ne.jp)

追記（1）学習ノートPart1～Part3 については、佐藤郁朗氏のホームページに載せさせていただいております。 [http://www.geocities.jp/ikuro\\_kotaro/koramu.htm](http://www.geocities.jp/ikuro_kotaro/koramu.htm) 2009 年 94、102,122,123 です。 Part1 のタウバー型定理を適用したところは不要かつ間違いも含んでるので飛ばしてください。

（2）打ち終わってから、岩波「数学辞典」p667 にオイラーの和公式（本稿中のオイラーマクロリンの和公式と少し違う）によって得られた、 $\zeta^*(s)$  に似た形の、しかし本物の  $\zeta(s)$  の式が出ているのを見つけた。

「 $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s \int_1^{\infty} \frac{f_0(x)}{x^{s+1}} dx$  ( $\text{Re}(s) > 1$ ) ここで  $f_0(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$  ( $x$  が整数でないとき)  $f_0(x) = 0$  ( $x$  が整数のとき) このとき右辺の積分は  $s$  に関し正則関数として全平面に延長されることが次の部分積分によって示される

$$\int_1^{\infty} \frac{f_0(x)}{x^{s+1}} dx = -f_1(1) + (s+1) \int_1^{\infty} \frac{f_1(x)}{x^{s+2}} dx, \dots$$
 とある。  $f_1(x), f_2(x), \dots$  の作り方は省略

した。とても興味津々だが、本来のテーマからは [IV] は付録のようなものなのでとにかく発表を急ぐことにする。